

VŠB – Technická univerzita Ostrava

Fakulta strojní

Katedra pružnosti a pevnosti

## **Statický výpočet těžní klece**

### **The Structural Analysis of the Hoisting Cage**

Student:

Petr Kolář

Vedoucí bakalářské práce:

Ing. Martin Fusek, Ph.D.

Ostrava 2012

## Zadání bakalářské práce

Student: **Petr Kolář**  
Studijní program: B2341 Strojírenství  
Studijní obor: 3901R003 Aplikovaná mechanika  
Téma: Statický výpočet těžní klece  
The Structural Analysis of the Hoisting Cage

Zásady pro vypracování:

1. Rozpracujte teorii řešení pro těžní klec.
2. Proveďte potřebné analytické výpočty.
3. Rozpracujte základní teorii metody konečných prvků.
4. Proveďte numerickou simulaci pomocí metody konečných prvků
5. Získané výsledky porovnejte.

Seznam doporučené odborné literatury:

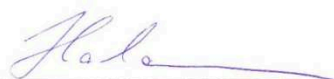
- [1] Lenert, J.: Pružnost a pevnost II, VŠB – Technická univerzita, Ostrava, 1998.
- [2] Němec, J., Dvořák, J., Höschl, C.: Pružnost a pevnost ve strojírenství, Technický průvodce 69, SNTL, Brno, 1989.
- [3] Bittnar, Z., Šejnoha, J.: Numerické metody mechaniky 1, Vydavatelství CVUT, Praha, 1992.
- [4] Lenert, J.: Úvod do metody konečných prvků, VŠB – TU Ostrava, 1999, ISBN 80 – 7078 – 686 – 8
- [5] Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L.: The Finite Element Method (Volume 1 - 3), Butterworth-Heinemann, Oxford 2000, ISBN 0-7506-5049-4
- [6] Macura, P.: Experimentální metody v pružnosti a plasticitě, VŠB – TU Ostrava, 2001, ISBN 80-7078-934-4

Formální náležitosti a rozsah bakalářské práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.


Vedoucí bakalářské práce: **Ing. Martin Fusek, Ph.D.**

Datum zadání: 16.12.2011

Datum odevzdání: 21.05.2012

  
doc. Ing. Radim Halama, Ph.D.  
vedoucí katedry



  
prof. Ing. Radim Farana, CSc.  
děkan fakulty

**Místopřísežné prohlášení studenta**

Prohlašuji, že jsem celou bakalářskou práci včetně příloh vypracoval samostatně pod vedením vedoucího bakalářské práce a uvedl jsem všechny použité podklady a literaturu.

V Ostravě 21.5.2012

.....

podpis autora práce

### **Poděkování**

Rád bych poděkoval vedoucímu bakalářské práce Ing. Martinu Fuskovi, Ph.D. za ochotu podělit se o své znalosti a zkušenosti a také za cenné rady k vypracování této bakalářské práce.

Prohlašuji, že

- jsem byl seznámen s tím, že na moji bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména § 35 – užití díla v rámci občanských a náboženských obřadů, v rámci školních představení a užití díla školního a § 60 – školní dílo.
- беру на ве́домі, že Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava (dále jen „VŠB-TUO“) má právo nevýdělečně ke své vnitřní potřebě bakalářskou práci užít (§ 35 odst.3).
- souhlasím s tím, že bakalářská práce bude elektronické podobě uložena v Ústřední knihovně VŠB-TUO k nahlédnutí a jeden výtisk bude uložen u vedoucího bakalářské práce. Souhlasím s tím, že údaje o kvalifikační práci budou zveřejněny v informačním systému VŠB-TUO.
- bylo sjednáno, že s VŠB-TUO, v případě zájmu z její strany, uzavřu licenční smlouvu s oprávněním užít dílo v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona.
- bylo sjednáno, že užít své dílo – bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem VŠB-TUO, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly VŠB-TUO na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše).
- беру на ве́домі, že odevzdáním své práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů, bez ohledu na výsledek její obhajoby.

V Ostravě 21.5.2012

.....

podpis autora práce

Jméno a příjmení autora práce: Petr Kolář

Adresa trvalého pobytu autora práce: Liščí 121, 725 27 Ostrava – Plesná

## ANOTACE BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Kolář, P. *Statický výpočet těžní klece: bakalářská práce*. Ostrava: VŠB – Technická universita Ostrava, Fakulta strojní, Katedra pružnosti a pevnosti, 2012, 40 s., Vedoucí práce Fusek, M.

Bakalářská práce se zabývá statickým výpočtem těžní klece. Klec je v prvním případě zatížena přepravou osob a ve druhém případě přepravou důlních vozíků. Nejprve je rozpracována teorie řešení pomocí metody konečných prvků a teorie potřebná k provedení analytických výpočtů. Následně jsou provedeny analytické výpočty nejvíce namáhaných částí klece a numerická simulace metodou konečných prvků. V závěru práce jsou porovnány výsledky obou metod a vyhodnoceny.

## ANNOTATION OF BACHELOR THESIS

Kolář, P. *The Structural Analysis of the Hoisting Cage: bachelor thesis*. Ostrava: VŠB - Technical university of Ostrava, Faculty of Mechanical Engineering, Department of Mechanics of Materials, 2012, 40 p. Thesis head: Fusek, M.

Bachelor thesis deals with the static calculation of hoisting cage. Cage is in the first case loaded with weight of passengers and in the second case loaded of shipments of mining trucks. First, the theory of solutions developed using the finite element method and theory required to perform analytical calculations. Subsequently, analytical calculations are made the most stressed parts of the cage and numerical simulation using finite elements. Finally, we compared the results of both methods and evaluated

## OBSAH:

1. Úvod.....	12
2. Popis konstrukce.....	13
3. Metoda konečných prvků.....	14
3.1 Analýza trojúhelníkového prvku.....	15
4. Teorie pro řešení klece.....	18
4.1 Ohyb nosníků.....	18
4.1.1 Diferenciální rovnice průhybové čáry.....	20
4.1.2 Graficko – analytická metoda (metoda momentových ploch).....	20
4.1.3 Castiglianova věta.....	21
4.2 Křivé pruty.....	23
4.2.1 Slabě zakřivené pruty.....	23
4.2.2 Uzavřené pruty (rámy).....	25
5. Praktická část.....	27
5.1 Analytické výpočty.....	27
5.1.1 Svislé pruty v horní části klece.....	27
5.1.2 Nosník zatížený koly vozíku.....	33
5.1.3 Oka uchycení.....	39
5.2 Numerická simulace.....	43
5.2.1 Vytvoření konečnoprvkového modelu.....	43
5.2.2 Zadání materiálových vlastností a okrajových podmínek....	44
5.2.3 Zadání zatížení.....	45
5.2.4 Vyhodnocení výpočtu.....	46
6. Porovnání analytických výpočtů s numerickými.....	50
7. Závěr.....	51
8. Seznam použité literatury.....	52

## Seznam použitých označení

Označení	jednotka	popis
$a$	mm	Rozměr nosníku
$A_x$	N	Reakce v ose x v bodě A
$A_y$	N	Reakce v ose y v bodě A
$A_f$	N	Fiktivní reakce v bodě A
$[A]$	-	Matice báзовých funkcí
$b$	mm	Rozměr nosníku
$b_i$	mm	Rozměr příčného průřezu nosníku
$b_A$	mm	Rozměr příčného průřezu nosníku
$b_B$	mm	Rozměr příčného průřezu nosníku
$b_{ii}$	mm	Rozměr příčného průřezu nosníku
$B_y$	N	Reakce v ose y v bodě B
$B_f$	N	Fiktivní reakce v bodě B
$[B]$	-	Matice zápisu lineárních aproximačních polynomů
$c_i$	-	Integrační konstanty
$[C]$	-	Matice materiálových konstant
$ds$	m	Délka střednice prutu
$d\varphi$	°	Úhel před deformací prutu
$E$	MPa	Modul pružnosti v tahu
$F$	N	síla
$\{F\}$	N	Vektor uzlových reakčních sil
$g$	$m \cdot s^{-2}$	Gravitační konstanta
$[G]$	-	Transformační matice
$h$	mm	Tloušťka prvku
$h_A$	mm	Rozměr příčného průřezu rámu
$h_B$	mm	Rozměr příčného průřezu rámu
$h_i$	mm	Rozměr příčného průřezu nosníku
$h_{ii}$	mm	Rozměr příčného průřezu nosníku
$J_y$	$m^4$	Moment setrvačnosti k ose y
$J_z$	$m^4$	Moment setrvačnosti k ose z
$J_{Y_{T\Box}}$	$m^4$	Moment setrvačnosti obdélníka
$J_{Y_T}$	$m^4$	Moment setrvačnosti k ose $Y_T$



$k$	-	Uzlový bod
$[K]$	$N \cdot m^{-1}$	Matice tuhosti prvku
$[\tilde{K}]$	$N \cdot m^{-1}$	Globální matice tuhosti
$l$	-	Uzlový bod
$l$	m	Délka svislého prutu nosníku
$\Delta l$	m	Změna délky
$L$	m	Délka nosníku
$m$	-	Uzlový bod
$m_{CK}$	kg	Celková hmotnost klece
$m_K$	kg	Hmotnost zbytkové části klece
$m_K$	kg	Hmotnost ostatních částí klece
$m_V$	kg	Hmotnost plně naloženého vozíku
$M_A$	$N \cdot m$	Ohybový moment v bodě A
$M_B$	$N \cdot m$	Ohybový moment v bodě B
$M_C$	$N \cdot m$	Ohybový moment v bodě C
$M_f$	$N \cdot m$	Fiktivní ohybový moment
$M_o$	$N \cdot m$	Obecný ohybový moment
$M_{fA}$	$N \cdot m$	Fiktivní ohybový moment k bodu A
$M_{fB}$	$N \cdot m$	Fiktivní ohybový moment k bodu B
$[N]$	-	Matice tvarových funkcí
$N_i(x, y)$	-	Složky matice tvarových funkcí
NV	-	Numerické výpočty
$p$	m	Délka nosníku rámu
$P$	MPa	Plošné zatížení
$q$	$N \cdot m^{-1}$	Spojitě zatížení
$q_f$	$N \cdot m^{-1}$	Fiktivní spojitě zatížení
$R$	m	Poloměr střednice prutu
$R_A$	N	Reakce v bodě A
$R_B$	N	Reakce v bodě B
$R_C$	N	Reakce v bodě C
$S_i$	$m^2$	Plošný obsah příčného průřezu
$[S]$	$m^2$	Plošný obsah trojúhelníkového prvku
$T_f$	N	Fiktivní posouvající síla

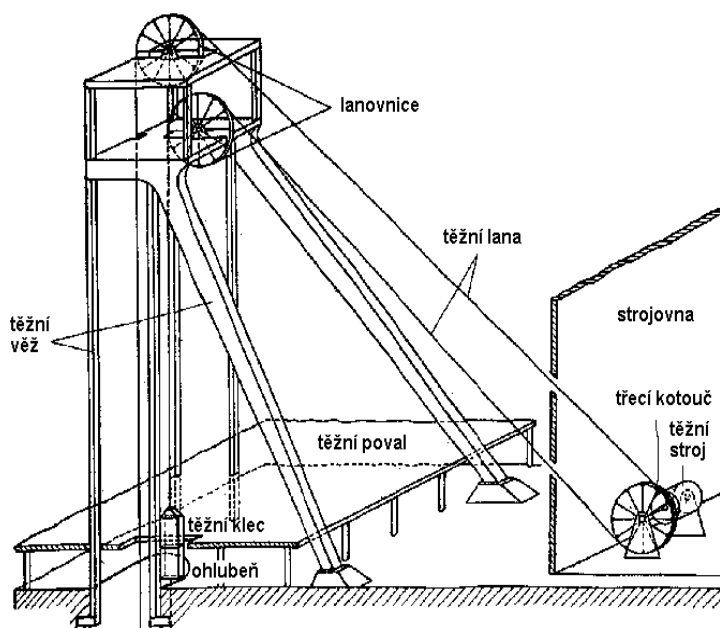
$T_{fA}$	N	Fiktivní posouvající síla v bodě A
$T_{fB}$	N	Fiktivní posouvající síla v bodě B
$u$	m	Posun ve směru osy x
$u_C$	m	Posun ve směru osy x v bodě C
$u(x, y)$	m	Posun uzlového bodu ve směru osy x
$u_i$	-	Vektor souřadnic uzlu
$\{u\}$	-	Vektor tvořící složky v obecném bodě prvku
$\{\tilde{u}\}$	m	Vektor obecných posuvů všech prvků
$U$	$N \cdot m$	Deformační energie
$v$	m	Posun ve směru osy y
$v(x, y)$	m	Posun uzlového bodu ve směru osy y
$w(x)$	m	Průhyb v ose x
$w_F$	m	Průhyb pod silou F
$w_{MAX}$	m	Maximální průhyb nosníku
$x_i$	m	Souřadnice uzlového bodu
$X$	N	Síla v ose x
$y_i$	m	Souřadnice uzlového bodu
$Y$	N	Síla v ose y
$z_T$	m	Vzdálenost od osy y k ose $Y_T$
$z_{MAX}$	m	Maximální vzdálenost od střednice ke krajnímu vláknu
$\{\alpha\}$	-	Vektor obecných konstant
$\alpha_i$	-	Parametr pole posuvů
$\delta_i$	m	posuv
$\{\varepsilon\}$	-	Tenzor pole deformací
$\mu$	-	Poissonova konstanta
$\rho$	m	Poloměr střednice po deformaci
$\rho_{(x)}$	m	Poloměr křivosti
$\sigma$	MPa	Normálové napětí
$\{\sigma\}$	MPa	Vektor napětí v prvku
$\sigma_x(y, z)$	MPa	Normálové napětí v ose x
$\sigma_t$	MPa	Napětí v tahu
$\sigma_V$	MPa	Výsledné napětí
$\sigma_{DOV}$	MPa	Dovolené napětí

$\sigma_{MAX}$	MPa	Maximální napětí v nosníku
$\varphi(x)$	°	Úhel natočení okolo osy x
$\Delta\varphi$	°	Úhel natočení okolo os
$\Delta\varphi_A$	°	Úhel natočení v bodě A
$\Delta\varphi_C$	°	Úhel natočení v bodě C
$\omega_i$	N	Fiktivní síly
$[\partial]$	-	Operátorová matice
$\{\Delta\}$	-	Vektor uzlových posuvů prvku

# 1. Úvod

Těžní klec je součástí svislé důlní dopravy. Důlní doprava je souhrn zařízení a prostředků k dopravě vytěžené rubaniny, lidí i materiálů potřebných k ražení a dobývání. Tato důlní doprava probíhá těžní jámou dopravními nádobami. Základním typem těžní nádoby je těžní klec. Klec je zavěšena na lanech a je prostřednictvím těžního stroje vytahována a spouštěna těžní věží do důlních jam. Těžní klec je neustále namáhaná konstrukce, která slouží k dopravě materiálu a lidí uhelných a rudných dolů. Tyto klece se konstruuje jako jednoetážové, nebo víceetážové a jsou většinou děleny pro snazší usazování do těžních jam. Také, je k nim možno zavěsit přídatný kontejner pro transport materiálu.

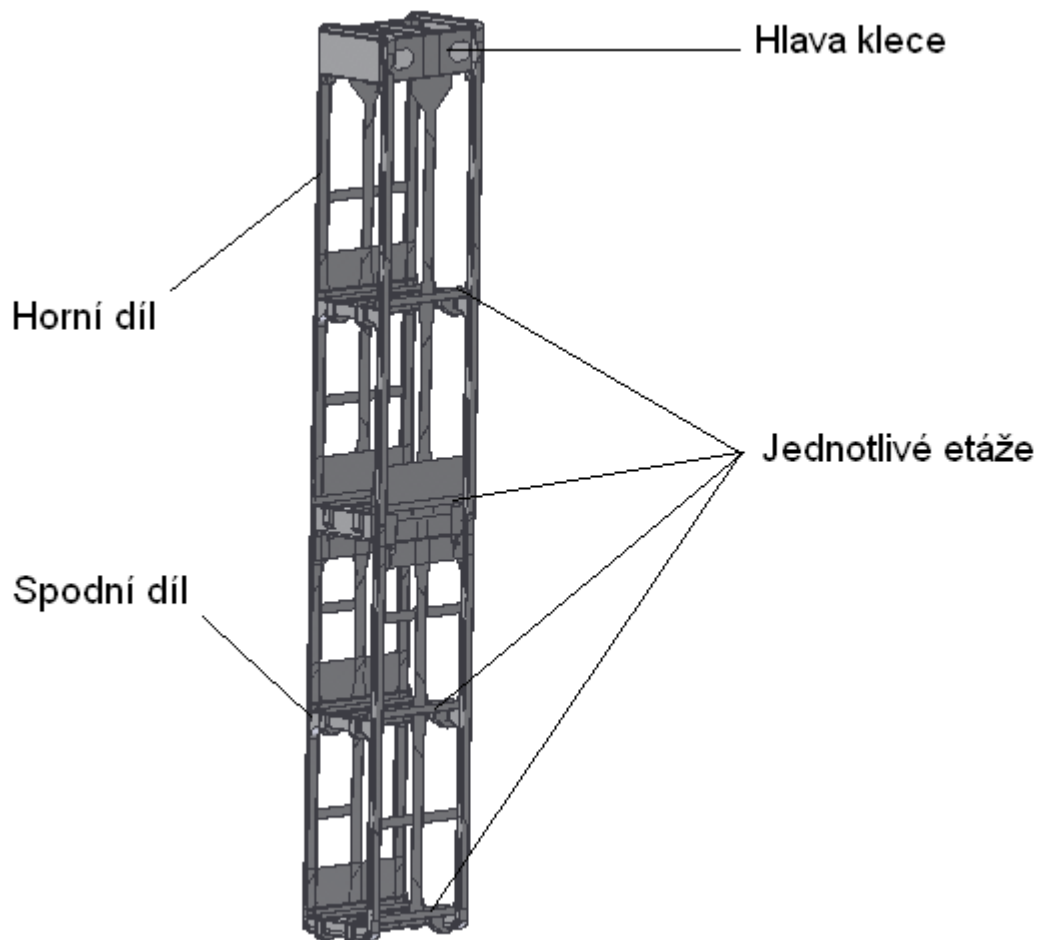
Naším úkolem je zkontrolovat nejvíce namáhané části těžní klece, která je nejprve zatížena přepravou osob po šesti lidech v každé etáži a poté hmotnosti plně naložených důlních vozíků (v každé etáži jeden vozík).



Obr. 1.1 – Schéma svislé důlní dopravy

## 2. Popis konstrukce

Na obr. 2.1 je model čtyřetážové těžní klece. Klec je dělená (hlava, horní nosný rám a spodní nosný rám). Klec je zavěšena na jednom těžném laně. Hlava klece je vybavena závěsy lana, záchytným ústrojím a vedením klece po průvodnici. Jednotlivé etáže jsou opatřeny kolejkami a aretačním zařízením pro důlní vozy, držáky pro přepravu lidí a oplechováním. Klec je řešena jako svařenec.



Obr. 2.1 - Čtyřetážová těžní klec

### 3. Metoda konečných prvků

- Čerpáno bylo z publikací [1] a [2]

Počátky metody konečných prvků již položili počátkem padesátých let minulého století ve svých pracích Alexander Hrennikoff a Richard Courant. Jako první přišli s myšlenkou rozdělit spojitě těleso na diskrétní části. Hrennikoff rozdělil těleso pomocí mřížky a Courant využil k dělení trojúhelníkovou síť, kterou posléze použil k řešení eliptických parciálních diferenciálních rovnic druhého stupně, jež byly sestaveny pro výpočet krutu válce. Poté začal vývoj MKP na universitě ve Stuttgartu prací Johna Argyrise a v 60. letech na universitě v Berkeley prací Raye W. Clougha. Do současné doby již vzniklo spoustu komerčních softwarů pro výpočet metodou konečných prvků, kvůli jeho širokému využití v technických oborech.

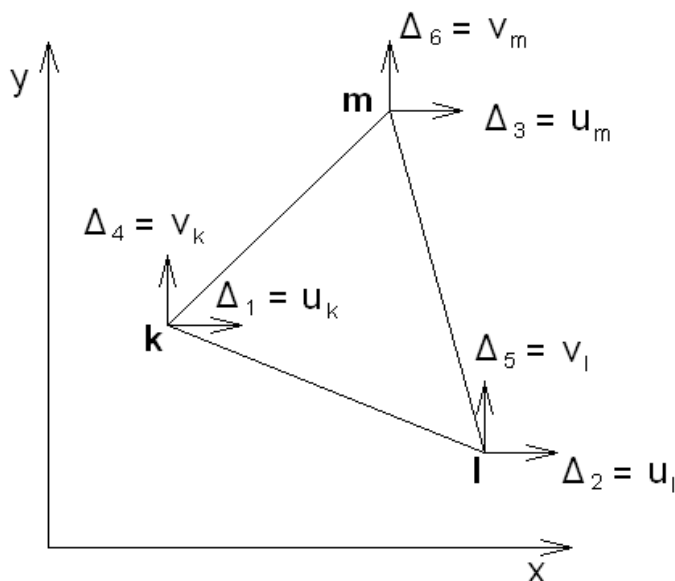
MKP je numerická metoda, kterou lze modelovat různé fyzikální vlivy za účelem získání hodnot napětí, deformace, frekvencí atd. na předem vytvořeném modelu.

Pro přípravu konečnoprvkového modelu je použit software Patran 2010. Program poskytuje širokou škálu nástrojů, pro vytvoření nebo úpravu geometrie modelu, síťování a simulaci mnoha fyzikálních úloh. Jako řešitel byl použit MSC Nastran, o jehož vytvoření, se zasloužili výzkumníci a vědci z Národního ústavu pro letectví a kosmonautiku (NASA).

Podstatou MKP je diskretizace (rozložení) oblasti na geometricky jednoduché oblasti, které lze snáze analyzovat. Rozložená oblast se nazývá síť konečných prvků. Pro silové složky nebo složky posunutí prvků musíme zvolit aproximační funkce, které budou na hranicích prvků odpovídat silám nebo posunutím sousedních prvků, většinou jde o polynomickou funkci. Pro každý prvek odvodíme matici tuhosti (u deformační varianty), nebo matici poddajnosti (u silové varianty). Avšak naprostá většina softwarů je založena na deformační variantě (řešení v posuvech) s kompatibilním modelem, proto se budeme zabývat jen deformační variantou. Výsledkem analýzy metody konečných prvků je matice tuhosti celé soustavy. Nutno dodat, že diskretizovaný model je tužší než reálný, tedy posuvy jsou menší než u skutečného modelu, při zhušťování sítě, vytváříme poddajnější model a výsledky se blíží reálným hodnotám.

U řešeného modelu jsou použity plošné prvky, a proto si dále ukážeme princip MKP na nejjednodušším plošném prvku – trojúhelníkovém.

### 3.1 Analýza trojúhelníkového prvku



Obr. 2.1 - Plošný trojúhelníkový prvek s uzlovými body  $k, l, m$

Pro posunutí obecného bodu prvku, volíme lineární aproximaci

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v(x, y) &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Vektor  $\{\mathbf{u}\} = (u, v)$  tvořící složky posuvů v obecném bodě prvku, lze zapsat v maticové formě

$$\{\mathbf{u}\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}, \quad (2.2)$$

vhodně sestavíme matici báзовých funkcí

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

vektor obecných konstant

$$\{\alpha^T\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}, \quad (2.4)$$

pak bude maticový zápis aproximačních funkcí

$$\{\mathbf{u}\} = [A] \cdot \{\alpha\}. \quad (2.5)$$

Do rovnice (2.5) dosadíme souřadnice uzlů

$$\begin{aligned} \{\mathbf{u}_k\} &= A_k \cdot \{\alpha\} \\ \{\mathbf{u}_l\} &= A_l \cdot \{\alpha\} \\ \{\mathbf{u}_m\} &= A_m \cdot \{\alpha\} \end{aligned} \quad (2.6)$$

a sestavíme vektor uzlových posuvů prvku

$$\{\Delta\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_k \\ \mathbf{u}_l \\ \mathbf{u}_m \end{Bmatrix} = \{u_k, v_k, u_l, v_l, u_m, v_m\}. \quad (2.7)$$

Sestavíme matici vytvořenou ze souřadnic uzlových bodů prvku, nul a jednotek

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & x_k & y_k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_l & y_l & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_m & y_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_k & y_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_l & y_l \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_m & y_m \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

pak můžeme rovnici (2.6) zapsat ve tvaru

$$\{\Delta\} = [B] \cdot \{\alpha\}. \quad (2.9)$$

Vektor konstant potom bude

$$\{\alpha\} = [B^{-1}] \cdot \{\Delta\}, \quad (2.10)$$

po dosazení do rovnice (2.5) získáme závislost vektoru posuvu v obecném bodě prvku na vektoru posuvů uzlových bodů:

$$\{\mathbf{u}\} = [A] \cdot [B^{-1}] \cdot \{\Delta\} \quad (2.11)$$

se zavedením substituce

$$\{\mathbf{u}\} = [N] \cdot \{\Delta\}. \quad (2.12)$$

Matice  $N$  se nazývá matice tvarových funkcí. Je pro každý typ a tvar prvků jiná a má značný fyzikální význam.

$$[N] = [A] \cdot [B^{-1}] \quad (2.13)$$

Pro zkoumaný trojúhelníkový prvek

$$[N] = \begin{bmatrix} N_k(x, y) & N_l(x, y) & N_m(x, y) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_k(x, y) & N_l(x, y) & N_m(x, y) \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

kde prvky matice jsou

$$\begin{aligned} N_k(x, y) &= (xb_k + yc_k + a_k) \cdot \frac{1}{2S} \\ N_l(x, y) &= (xb_l + yc_l + a_l) \cdot \frac{1}{2S} \\ N_m(x, y) &= (xb_m + yc_m + a_m) \cdot \frac{1}{2S} \end{aligned} \quad (2.15)$$

zde  $S$ , je plošný obsah trojúhelníkového prvku

$$[S] = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & x_k & y_k \\ 1 & x_l & y_l \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} \quad (2.16)$$



a dále

$$\begin{aligned} a_k &= x_l y_m - x_m y_l, \quad b_k = y_l - y_m, \quad c_k = x_m - x_l \\ a_l &= x_m y_k - x_k y_m, \quad b_l = y_m - y_k, \quad c_l = x_k - x_m \\ a_m &= x_k y_l - x_l y_k, \quad b_m = y_k - y_l, \quad c_m = x_l - x_k \end{aligned} \quad (2.17)$$

poté můžeme složky posuvu sepsat následovně

$$\begin{aligned} u(x, y) &= N_k u_k + N_l u_l + N_m u_m \\ v(x, y) &= N_k v_k + N_l v_l + N_m v_m. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Sestavíme tenzorové pole deformací pro rovinný stav ve vektorové podobě

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

a pro určení závislosti poměrných deformací na složkách posuvu v obecném bodě prvku, využijeme operátorovou matici

$$[\partial] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Pak lze zapsat rovnici

$$\{\varepsilon\} = [\partial] \cdot \{\mathbf{u}\}. \quad (2.21)$$

- Rovnice vychází z Cauchyho geometricko- deformačních rovnic.

Po dosazení z (2.12) za vektor  $\{\mathbf{u}\}$  bude

$$\{\varepsilon\} = [\partial] \cdot [N] \cdot \{\Delta\}. \quad (2.22)$$

Se zavedením substituce, lze vektor poměrných deformací pomocí vektoru zobecněných uzlových posuvů zapsat ve tvaru

$$\{\varepsilon\} = [G] \cdot \{\Delta\}. \quad (2.23)$$

$G$  – transformační matice

Bez uvažování vlivu teploty vychází napětí v prvku z Hookeova zákona v maticové podobě následovně

$$\{\sigma\} = [C] \cdot \{\varepsilon\}, \quad (2.24)$$

kde

$$[C] = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

je matice materiálových konstant.

Poté můžeme rovnici pro napětí v prvku s využitím rovnice (2.23) zapsat ve tvaru

$$\{\sigma\} = [C] \cdot [G] \cdot \{\Delta\}. \quad (2.26)$$

Nyní můžeme sepsat rovnici pro výpočet matice tuhosti trojúhelníkového prvku

$$[K] = [G^T] \cdot [C] \cdot [G] \cdot h \cdot |S| \quad (2.27)$$

kde

$h$  – tloušťka prvku

$S$  – plošný obsah prvku.

Matice tuhosti prvku je velikosti 6x6, je symetrická a singulární. Je nutno sestavit matici tuhosti pro každý prvek a tyto matice převést do globální matice tuhosti celé soustavy.

Následně ze základní rovnice MKP pro celou soustavu

$$[\tilde{K}] \cdot \{\tilde{u}\} = \{F\}, \quad (2.28)$$

stanovíme vektor uzlových posuvů  $\{\tilde{u}\}$  a poté dopočtem vektor uzlových reakčních sil  $\{F\}$ . Nelze postupovat opačným způsobem.

$\tilde{K}$  - matice tuhosti celé soustavy (tzv. globální matice tuhosti)

$\tilde{u}$  - vektor zobecněných posuvů pro všechny uzly soustavy

Zbývá doplnit statické a geometrické okrajové podmínky, které se určují až pro celou řešenou soustavu.

## 4. Teorie pro řešení klece

- čerpáno z publikací [3] - [6]

### 4.1 Ohyb nosníků

Prostým ohybem rozumíme namáhání, při kterém vzniká v každém bodě střednice jako vnitřní účinek ohybový moment.

Pro stanovení napjatosti a deformace v ohýbaném nosníku platí předpoklady:

- Příčné průřezy zůstávají po zatížení rovinné
- V jednotlivých bodech prutu vzniká jednoosá napjatost

Poté, lze z Hookeova zákona, vyjádřit normálové napětí v příčném průřezu nosníku rovnicí

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (4.1.1)$$

Rovinným ohybem nazýváme případ, kdy rovina zatěžujících momentů obsahuje podélnou osu prutu a jednu z hlavních centrálních os příčného řezu.

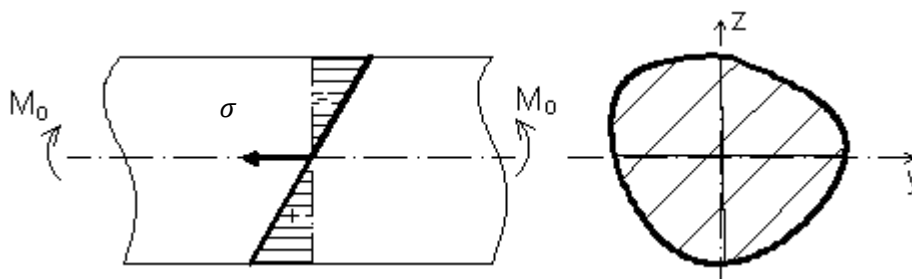
U rovinného ohybu platí předpoklady:

- Napětí a deformace jsou v průřezu rozloženy podle zákona roviny
- Neutrální osa prochází těžištěm a je totožná s jednou centrální osou
- Napětí a deformace jsou přímo úměrné vzdálenosti od neutrální osy
- Vlákná v rovinně neutrální osy nejsou namáhána

Napětí a deformace vypočítáme ze vztahů

$$\sigma_x(y, z) = \frac{M_y}{J_y E} z, \quad (4.1.2)$$

$$\varepsilon_x(y, z) = \frac{M_y}{J_y E} z. \quad (4.1.3)$$

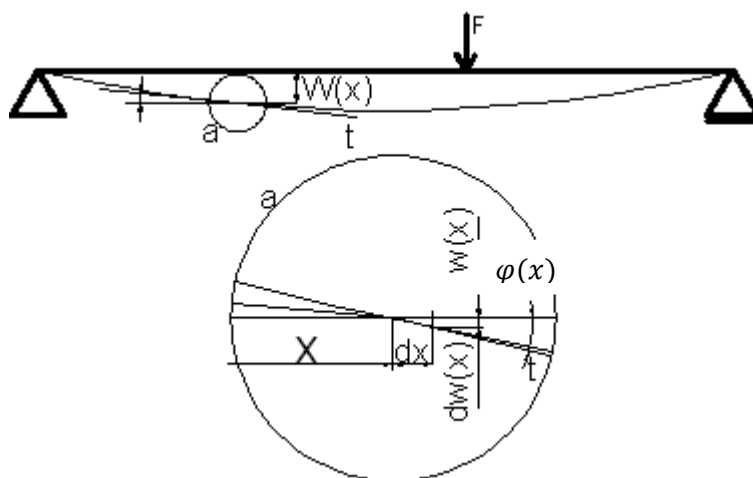


Obr. 4.1.1 Rozložení napětí při rovinném ohybu

Ze vztahu (4.1.2) a obr. 4.1 je zřejmé, že největší napětí v ohýbaném nosníku je v nejvzdálenějších vláknech od neutrální osy, nezávisle na tvaru průřezu.

### Deformace nosníku při rovinném ohybu

Deformaci nosníku určuje střednice, která vlivem zatěžujících sil kolmých k podélné ose nosníku, mění svůj tvar, avšak její délka se nemění.



Obr. 4.1.2 Vliv průhybu na úhlu natočení

Pro směrnici tečny podle obr. 4.1.2 plyne

$$tg\varphi = \frac{dw(x)}{dx} = w'(x) \quad (4.1.4)$$

Deformace uvažujeme velice malé oproti rozměrům nosníku, a proto lze psát

$$tg\varphi(x) \approx \varphi(x) = w'(x).$$

### 4.1.1 Diferenciální rovnice průhybové čáry

Pro křivost střednice prutu je na základě Bernoulli-Navierovy teorie a platnosti Hookeova zákona stanoven vztah

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M_o(x)}{EJ_Y}, \quad (4.1.5)$$

kde

$\rho(x)$  - poloměr křivosti,  $M_o(x)$  – ohybový moment v řezu a  $EJ_Y$  – tuhost nosníku v ohybu.

Rovnice pro křivost křivky v rovině má tvar

$$\frac{1}{\rho(x)} = \pm \frac{w''(x)}{[1 + (w'(x))^2]^{3/2}}. \quad (4.1.6)$$

Při sloučení rovnic (4.1.5) a (4.1.6) a uvažování malých deformací, můžeme zjednodušeně psát

$$w''(x) = \frac{M_o(x)}{EJ_Y}, \quad (4.1.7)$$

což je diferenciální rovnice průhybové čáry.

Když dále rovnici (4.1.7) postupně integrujeme, získáváme úhel natočení a rovnici průhybové čáry

$$w'(x) \cong \varphi = \int \frac{M_o(x)}{EJ_Y} dx + C_1, \quad (4.1.8)$$

$$w(x) = \iint \frac{M_o(x)}{EJ_Y} dx + C_1 x + C_2. \quad (4.1.9)$$

$C_1$  a  $C_2$  jsou integrační konstanty, které se určí z okrajových podmínek uložení nosníku.

### 4.1.2 Graficko – analytická metoda (metoda momentových ploch)

Zde využíváme formální matematické podobnosti diferenciální rovnice průhybové čáry

$$EJ_Y w''(x) = \pm M_o(x) \quad (4.1.10)$$

a Schwedlerovy věty

$$M_f''(x) = \pm q_f(x). \quad (4.1.11)$$

Uvažujeme momentovou plochu vyšetřovaného nosníku jako spojitě zatížení tzv. fiktivního nosníku. Což plyne z rovnosti pravých stran rovnic (4.1.10) a (4.1.11) .

$$q_f(x) = M_o(x) \quad (4.1.12)$$

Potom lze průhyb skutečného nosníku vyjádřit jako ohybový moment fiktivního nosníku.

$$EJ_y w''(x) = M_f''(x) \quad (4.1.13)$$

Avšak fiktivní nosník musí splňovat okrajové podmínky nosníku skutečného. Když je v řezu skutečného nosníku průhyb roven nule, tak ve fiktivním nosníku v tomtéž řezu musí být roven nule ohybový moment. Je-li v řezu skutečného nosníku roven nule úhel natočení, je v tomtéž řezu fiktivního nosníku rovna nule posouvající síla. To stejné platí pro nenulové hodnoty.

$$w = 0, \quad M_f = 0$$

$$w \neq 0, \quad M_f \neq 0$$

$$\varphi = 0, \quad T_f = 0$$

$$\varphi \neq 0, \quad T_f \neq 0$$

Postupným integrováním rovnice (4.1.13) a po úpravě získáme vztahy pro výpočet deformace

$$\varphi(x) = \frac{T_f(x)}{EJ_y} \quad (4.1.14)$$

a

$$w(x) = \frac{M_f(x)}{EJ_y}. \quad (4.1.15)$$

### 4.1.3 Castiglianova věta

Je-li pružné těleso zatížené vnějšími silami, platí-li Hookeův zákon a jsou-li splněny statické podmínky rovnováhy, platí i Castiglianova věta

$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial F_i}. \quad (4.1.16)$$

Kde  $\delta_i$  je posuv ve směru síly  $F_i$  a  $U$  je deformační energie v deformovaném tělese, vlivem působení všech akčních sil.

Dále můžeme psát pro výpočet průhybu v místě síly  $F_i$

$$w_i = \frac{\partial U}{\partial F_i} \quad (4.1.17)$$

a výpočet úhlu natočení v místě momentu  $M_i$

$$\varphi_i = \frac{\partial U}{\partial M_i}. \quad (4.1.18)$$

Nepůsobí-li ve vyšetřovaném bodě žádná síla či ohybový moment, připojíme do tohoto místa doplňkovou sílu  $F_d$  pro určení průhybu, nebo doplňkový moment  $M_d$  pro určení úhlu natočení. Tyto silové účinky mají nulovou hodnotu.

Potenciální energie deformace je pro přímý prut stanovena vztahem

$$U = \frac{1}{2EJ_y} \int_0^l M_o^2(x) dx \quad (4.1.19)$$

V této rovnici je zanedbána posouvající síla, která má vliv na deformaci nosníku minimální.

Dosazením rovnice (4.1.19) do (4.1.17) respektive (4.1.18) a po úpravě získáme výraz pro výpočet průhybu ve tvaru

$$w_i = \frac{1}{EJ_y} \int_0^l M_o(x) \frac{\partial M_o(x)}{\partial F_i} dx \quad (4.1.20)$$

a úhlu natočení ve tvaru

$$\varphi_i = \frac{1}{EJ_y} \int_0^l M_o(x) \frac{\partial M_o(x)}{\partial M_i} dx. \quad (4.1.21)$$

U staticky neurčitých nosníků, kdy je počet vazebních podmínek větší, než je počet podmínek rovnováhy, musíme tyto podmínky rovnováhy doplnit podmínkami deformačními. Odstraníme příslušný počet podpor a nahradíme zatím neznámými zbytnými reakcemi, kterým předepíšeme podmínku  $w = 0$ , či  $\varphi = 0$  (průhyb, nebo natočení v dané podpoře je nulové). Z takto vytvořených rovnic dopočteme zbytné reakce.

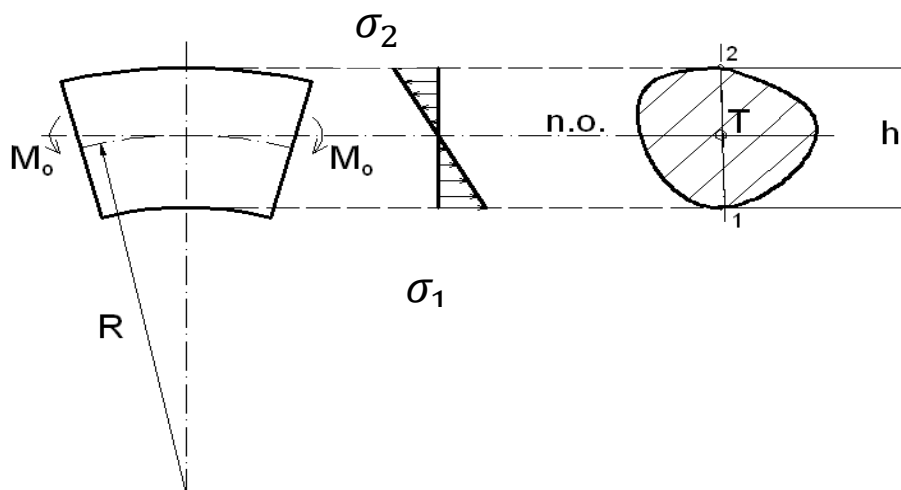
## 4.2 Křivé pruty

O prutu mluvíme v případě, kdy spojnice procházející středy těžišť příčných průřezů tvoří rovinné, nebo prostorové křivky, nebo úsečky. Dále budou probírány pouze rovinné pruty, kdy jsou zatěžující síly v rovině nosníku. Pruty dělíme na slabě zakřivené a silně zakřivené.

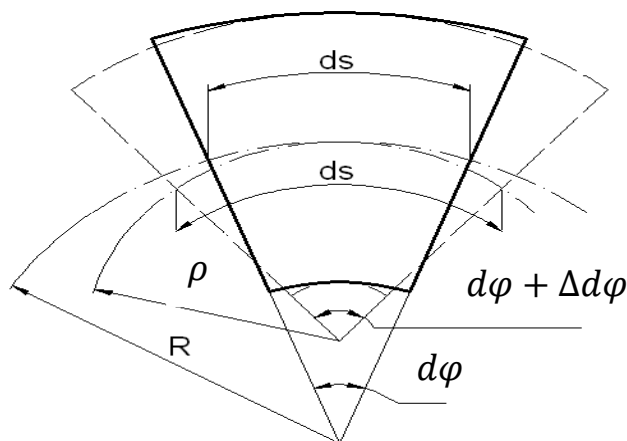
### 4.2.1 Slabě zakřivené pruty

Dále se budeme zabývat pouze tenkými rovinnými křivými, nebo lomenými pruty.

O tenký křivý prut se jedná při splnění podmínky  $\frac{R}{h} \geq 5$ , přičemž  $h$  je výška příčného průřezu a  $R$  je poloměr zakřivení střednice. Střednice prochází těžištěm příčného průřezu a předpokládá se lineární průběh napětí. Dále můžeme pruty rozdělit na staticky určité, staticky neurčité a pruty uzavřené s vnitřní statickou neurčitostí.



Obr. 4.2.1 - Elementární část tenkého křivého prutu obecného průřezu zatíženého ohybem  
**Změna zakřivení vlivem momentu  $M_0$**



Obr. 4.2.2 – Změna zakřivení vlivem zatěžujícího momentu

$ds$  – délka střednice

$R$  – poloměr střednice před deformací prutu

$\rho$  – poloměr střednice po deformaci prutu

$d\varphi$  – úhel před deformací

$d\varphi + \Delta d\varphi$  – úhel po deformaci

Poloměr střednice elementu se tedy změní na hodnotu  $\rho$  a úhel se zvětší o hodnotu  $\Delta d\varphi$ , délka střednice se nemění.

Protože se délka střednice nemění, musí platit vztahy

$$ds = Rd\varphi = \rho(d\varphi + \Delta d\varphi) = \rho d\varphi \left(1 + \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}\right). \quad (4.2.1)$$

Po úpravě můžeme zapsat rovnici (4.2.1) ve tvaru

$$\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{1}{R} \left(1 + \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}\right). \quad (4.2.2)$$

Vztah mezi zatěžujícím momentem a průhybem lze zapsat následovně

$$w^{\text{II}} = \varphi^{\text{I}} = \frac{M_o}{EJ_y} \quad (4.2.3)$$

dále

$$\frac{\Delta d\varphi}{ds} = \frac{\Delta d\varphi}{Rd\varphi} = \frac{M_o}{EJ_y}. \quad (4.2.4)$$

Poté lze změnu zakřivení vlivem zatěžujícího momentu  $M_o$ , zapsat ve tvaru

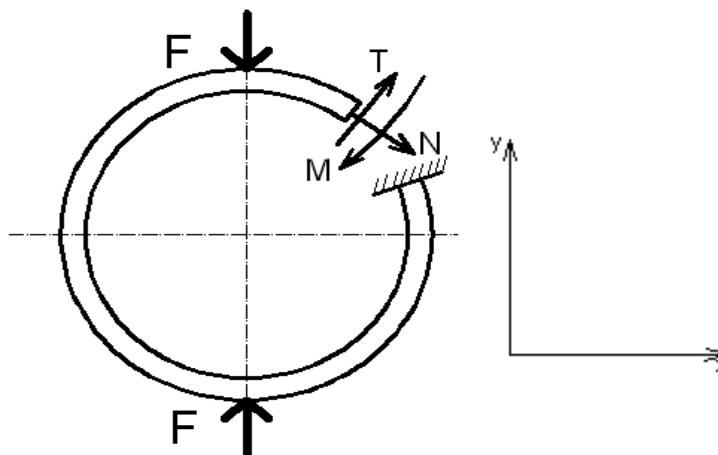
$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R} + \frac{M_o}{EJ_y}. \quad (4.2.5)$$



### 4.2.2 Uzavřené křivé pruty (rámy)

Rámy jsou vnitřně staticky neurčitý prvky. Uzavřené křivé pruty, nebo také rámy nazýváme křivé, případně zalomené nosníky, jejichž střednice tvoří uzavřená křivka.

Vnější silové veličiny určujeme z podmínek rovnováhy. Rámy jsou však vnitřně staticky neurčitý a to obecně třikrát. Tuto vnitřní statickou neurčitost odstraňujeme metodou řezu a hledané silové veličiny dopočteme z deformačních podmínek.



Obr. 4.2.2 – Uzavřený křivý prut tvaru prstence zatěžovaný symetricky silou  $F$

Po rozříznutí rámu, připojíme k volným částem silové účinky, aby byl rám v rovnováze, oddělené konce se chovají jako vetknuté a proto zavedeme 3 silové účinky, normálovou sílu  $N$ , posouvající sílu  $T$  a ohybový moment  $M$ .

Poté můžeme zavést deformační podmínky:

Posunutí v ose  $x$ , posunutí v ose  $y$  a natočení kolem středu os

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \Delta\varphi = 0. \quad (4.2.6)$$

Z deformačních podmínek lze dopočíst neznámé silové účinky, přičemž každá osa symetrie vzhledem ke geometrii a zatížení rámu, snižuje statickou neurčitost o jeden stupeň. Pro rám na obr. 4.2.2 lze řešit pouze jeho čtvrtinu a postačí nám jedna deformační podmínka pro zbytný silový účinek.

Při dalším řešení využíváme Castiglianovu větu, která vyjadřuje vztah mezi deformací tělesa a energií akumulovanou v tělese vlivem zatížení. Každé elastické těleso se vlivem zatěžujících sil deformuje a práce při tomto vynaložena se v tělese akumuluje ve formě potenciální energie deformace  $U$ .

U slabě zakřivených prutů je potenciální energie deformace pro posouvající a osově síly minimální, a proto stačí stanovit potenciální energii deformace pouze od ohybového momentu.

$$U = \frac{1}{2} \frac{1}{E} \int_{l_1}^{l_2} \frac{M_o^2(x, y)}{J_z} ds. \quad (4.2.7)$$

Z tohoto plynou Castiglianovy věty:

posunutí v ose  $x$

$$u = \frac{\partial U}{\partial X} = \frac{1}{EJ_z} \int_{l_1}^{l_2} M_o(x, y) \cdot \left( \frac{\partial M_o(x, y)}{\partial X} \right) ds, \quad (4.2.8)$$

posunutí v ose  $y$

$$v = \frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{1}{EJ_z} \int_{l_1}^{l_2} M_o(x, y) \cdot \left( \frac{\partial M_o(x, y)}{\partial Y} \right) ds, \quad (4.2.9)$$

a natočení

$$\Delta\varphi = \frac{\partial U}{\partial M} = \frac{1}{EJ_z} \int_{l_1}^{l_2} M_o(x, y) \cdot \left( \frac{\partial M_o(x, y)}{\partial M} \right) ds. \quad (4.2.10)$$

Po dosazení do deformačních podmínek

$$u = \frac{\partial U}{\partial X} = 0, \quad v = \frac{\partial U}{\partial Y} = 0, \quad \Delta\varphi = \frac{\partial U}{\partial M} = 0 \quad (4.2.11)$$

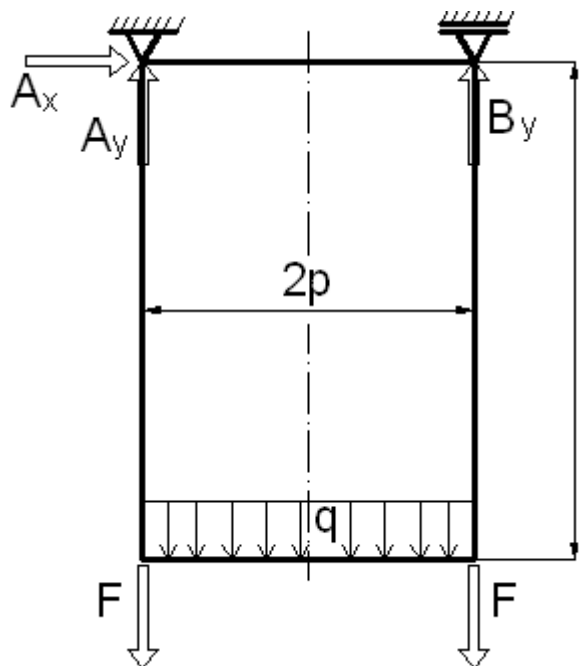
dopočteme účinky  $X, Y, M$ .

## 5. Praktická část

### 5.1 Analytické výpočty

#### 5.1.1 Svislé pruty v horní části klece

Svislé pruty v horní části klece vypočteme pomocí zjednodušeného modelu rovinné rámové konstrukce.



Obr. 5.1.1 – Zjednodušený model rovinné rámové konstrukce

**Rozměry rámu:**

$$l = 2,4 \text{ m}, \quad p = 0,455 \text{ m}$$

**Zatížení rámu:**

$m_V$  – hmotnost plně naloženého vozíku

$m_K$  – hmotnost zbytkové části klece

$m_S$  – hmotnost ostatních součástí

$g$  – gravitační konstanta

$$F = \frac{3 \cdot m_V \cdot g + m_K \cdot g}{4} \quad (5.1.1)$$
$$F = \frac{3 \cdot 1390 \cdot 9,81 + 3100 \cdot 9,81}{4} = \underline{17830 \text{ N}}$$

- Rovnice (5.1.1) je vydělena čtyřmi, neboť se síla dělí mezi čtyři pruty.

$$q = \frac{\frac{m_V \cdot g + m_S \cdot g}{2p}}{2}$$

$$q = \frac{\frac{1390 \cdot 9,81 + 120 \cdot 9,81}{2 \cdot 0,455}}{2} = \underline{8140 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}} \quad (5.1.2)$$

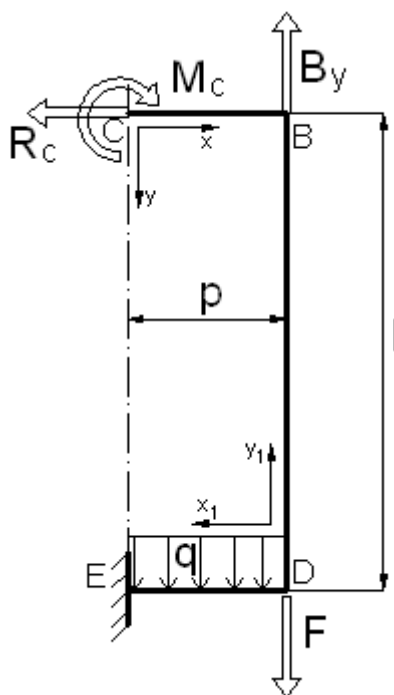
- Rovnice (5.1.2) je vydělena dvěma, neboť se spojité zatížení rozkládá na dva nosníky.

Ze statických podmínek rovnováhy určíme reakce

$$\sum F_i x = 0; \quad Ax = 0 \quad (5.1.3)$$

$$\sum F_i y = 0; \quad A_y = B_y = F + q \cdot p = 17830 + 8140 \cdot 0,455 = \underline{21534 \text{ N}} \quad (5.1.4)$$

Řešený rám má jednu osu symetrie vzhledem ke geometrii a zatížení, můžeme tedy řešit pouze polovinu rámu s tím, že se statická neurčitost sníží o jeden stupeň.



Obr. 5.1.2

Po rozříznutí rámu jsme jeden konec vetkli a druhý zatížili neznámými silovými účinky  $R_c, M_c$ , které dopočteme z deformačních podmínek v bodě C, pro úhel natočení a posun v ose  $x$

$$u_c = 0, \quad \Delta\varphi_c = 0. \quad (5.1.5)$$

Zbylá část rámu je rozdělena na úseky CB, BD a DE. K těmto úsekům určíme ohybový moment jako funkce souřadnic.

$$M_o = M_c \quad \text{úsek CB,}$$

$$M_o = M_c - R_c \cdot y \quad \text{úsek BD,}$$

$$M_o = M_c - R_c \cdot l - B_y \cdot x_1 + F \cdot x_1 + \frac{q \cdot x_1^2}{2} \quad \text{úsek DE.}$$

Nyní určíme parciální derivace momentů podle reakce  $R_c$  a momentu  $M_c$  v příslušných úsecích

$$\frac{\partial M_o}{\partial R_c} = 0; \quad \frac{\partial M_o}{\partial M_c} = 1 \quad \text{úsek CB,}$$

$$\frac{\partial M_o}{\partial R_c} = -y; \quad \frac{\partial M_o}{\partial M_c} = 1 \quad \text{úsek BD,}$$

$$\frac{\partial M_o}{\partial R_c} = -l; \quad \frac{\partial M_o}{\partial M_c} = 1 \quad \text{úsek DE.}$$

Při řešení reakcí vycházíme z Castiglianovy věty. Nejprve pro posuv  $u_c$

$$u_c = \frac{1}{EJ} \left( \int_C^B M_o \frac{\partial M_o}{\partial R_c} ds + \int_B^D M_o \frac{\partial M_o}{\partial R_c} ds + \int_D^E M_o \frac{\partial M_o}{\partial R_c} ds \right). \quad (5.1.6)$$

Dosadíme

$$u_c = \frac{1}{EJ} \left[ - \int_0^l (M_c - R_c \cdot y) y dy - \int_0^p \left( M_c - R_c \cdot l - B_y \cdot x_1 + F \cdot x_1 + \frac{q \cdot x_1^2}{2} \right) l dx_1 \right], \quad (5.1.7)$$

po integraci a úpravách, dostaneme posuv  $u_c$  ve tvaru

$$u_c = \frac{l}{EJ} \cdot \left[ -M_c \cdot \left( \frac{l}{2} + p \right) + R_c \cdot \left( \frac{l^2}{3} + l \cdot p \right) + \frac{B_y \cdot p^2}{2} - \frac{F \cdot p^2}{2} - \frac{q \cdot p^3}{6} \right]. \quad (5.1.8)$$

Dále pro úhel natočení  $\Delta\varphi_c$

$$\Delta\varphi_c = \frac{1}{EJ} \left( \int_C^B M_o \frac{\partial M_o}{\partial M_c} ds + \int_B^D M_o \frac{\partial M_o}{\partial M_c} ds + \int_D^E M_o \frac{\partial M_o}{\partial M_c} ds \right). \quad (5.1.9)$$

Dosadíme

$$\Delta\varphi_c = \frac{1}{EJ} \left[ \int_0^p M_c dx + \int_0^l (M_c - R_c \cdot y) dy + \int_0^p \left( M_c - R_c \cdot l - B_y \cdot x_1 + F \cdot x_1 + \frac{q \cdot x_1^2}{2} \right) dx_1 \right] \quad (5.1.10)$$

po integraci a úpravách, dostaneme úhel natočení  $\Delta\varphi$  ve tvaru

$$\Delta\varphi_c = \frac{1}{EJ} \left[ M_c \cdot (2p + l) - R_c \cdot \left( \frac{l^2}{2} + l \cdot p \right) - \frac{B_y \cdot p^2}{2} + \frac{F \cdot p^2}{2} + \frac{q \cdot p^3}{6} \right]. \quad (5.1.11)$$

Rovnice (5.1.8) a (5.1.1) dosadíme do deformačních podmínek  $u_c = 0$ ,  $\Delta\varphi_c = 0$

$$-M_c \cdot \left( \frac{l}{2} + p \right) + R_c \cdot \left( \frac{l^2}{3} + l \cdot p \right) + \frac{B_y \cdot p^2}{2} - \frac{F \cdot p^2}{2} - \frac{q \cdot p^3}{6} = 0 \quad (5.1.12)$$

$$M_c \cdot (2p + l) - R_c \cdot \left( \frac{l^2}{2} + l \cdot p \right) - \frac{B_y \cdot p^2}{2} + \frac{F \cdot p^2}{2} + \frac{q \cdot p^3}{6} = 0. \quad (5.1.13)$$

Dále dosadíme známé hodnoty

$$-M_c \cdot \left( \frac{2,4}{2} + 0,455 \right) + R_c \cdot \left( \frac{2,4^2}{3} + 2,4 \cdot 0,455 \right) + \frac{21534 \cdot 0,455^2}{2} - \frac{17830 \cdot 0,455^2}{2} - \frac{8140 \cdot 0,455^3}{6} = 0$$

$$M_c \cdot (2 \cdot 0,455 + 2,4) - R_c \cdot \left( \frac{2,4^2}{2} + 2,4 \cdot 0,455 \right) - \frac{21534 \cdot 0,455^2}{2} + \frac{17830 \cdot 0,455^2}{2} + \frac{8140 \cdot 0,455^3}{6} = 0$$

a dopočteme reakce

$$R_c = \underline{-124,57 \text{ N}}, \quad M_c = \underline{-72,27 \text{ Nm}}. \quad (5.1.14)$$

Nyní můžeme zapsat funkce rozložení momentu v jednotlivých úsecích

$$M_o = -72,27, \quad \text{úsek CB,}$$

$$M_o = -72,27 + 124,57 \cdot y, \quad \text{úsek BD,}$$

$$M_o = 226,698 - 3704 \cdot x_1 + 4070 \cdot x_1^2 \quad \text{úsek DE.}$$

Po dosazení určíme hodnoty momentu

$$M_o(0) = -72,27 \text{ Nm}; \quad M_o(p) = -72,27 \text{ Nm} \quad \text{úsek CB,}$$

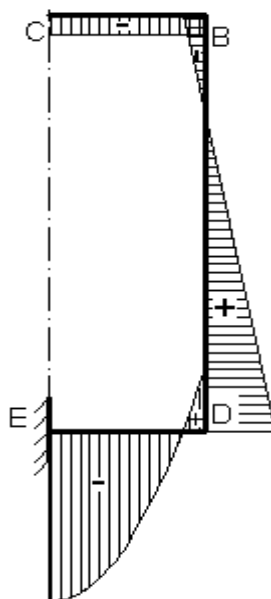
$$M_o(0) = -72,27 \text{ Nm}; \quad M_o(l) = 226,7 \text{ Nm} \quad \text{úsek BD,}$$

$$M_o(0) = 226,7 \text{ Nm}; \quad M_o(p) = -616,03 \text{ Nm} \quad \text{úsek DE.}$$

Dále vypočteme extrém funkce v úseku DE

$$\frac{dM_o}{dx} = 8140 \cdot x_1 - 3704 = 0$$

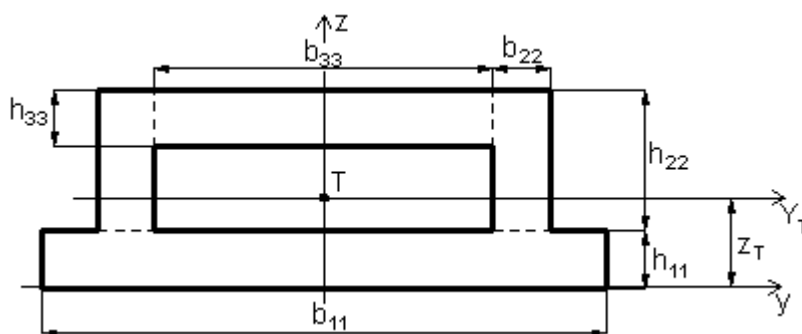
$x_1 = 0,455 \text{ m} \Rightarrow$  maximální moment je ve vetknutí  $M_{o_{MAX}} = -616,03 \text{ Nm}$ .



Obr. 5.1.3 - Grafické znázornění průběhů momentů

Největší hodnota momentu vychází v úseku DE, avšak v tomto úseku je velice masivní průřez, takže zde napětí a deformace budou velice malé. Naším úkolem je zkontrolovat svislé pruty, které mají plochu průřezu znatelně nižší.

Pro určení hodnot napětí a deformací prutů, musíme nejprve vypočítat moment setrvačnosti průřezu k ose  $Y_T$ .



Obr. 5.1.4 – Příčný průřez svislého prutu

**Rozměry příčného průřezu:**

$$\begin{aligned} b_{11} &= 140 \text{ mm}, & h_{11} &= 6 \text{ mm}, & b_{22} &= 6 \text{ mm}, & h_{22} &= 54 \text{ mm}, \\ b_{33} &= 108 \text{ mm}, & h_{33} &= 6 \text{ mm} \end{aligned}$$

Určení svislé polohy těžiště z rovnosti statických momentů

$$\begin{aligned}
 z_T &= \frac{\sum S_i \cdot z_i}{\sum S_i} & (5.1.15) \\
 &= \frac{b_{11} \cdot h_{11} \cdot \frac{h_{11}}{2} + 2 \cdot \left[ b_{22} \cdot h_{22} \cdot \left( h_{11} + \frac{h_{22}}{2} \right) \right] + b_{33} \cdot h_{33} \cdot \left( h_{11} + h_{22} - \frac{h_{33}}{2} \right)}{b_{11} \cdot h_{11} + 2 \cdot b_{22} \cdot h_{22} + b_{33} \cdot h_{33}} \\
 &= \frac{140 \cdot 6 \cdot \frac{6}{2} + 2 \cdot \left[ 6 \cdot 54 \cdot \left( 6 + \frac{54}{2} \right) \right] + 108 \cdot 6 \cdot \left( 6 + 54 - \frac{6}{2} \right)}{140 \cdot 6 + 2 \cdot 6 \cdot 54 + 108 \cdot 6} \\
 z_T &= \underline{28,48 \text{ mm}}
 \end{aligned}$$

Příčný průřez je složen z obdélníků a pro ten platí moment setrvačnosti

$$J_{Y_{T\Box}} = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad (5.1.16)$$

Dle Steinerovy věty vypočteme moment setrvačnosti k těžištní ose  $y_T$

$$J_{Y_T} = J_{Y_{T11}} + 2 \cdot J_{Y_{T22}} + J_{Y_{T33}}. \quad (5.1.17)$$

Po vyjádření

$$\begin{aligned}
 J_{Y_T} &= \frac{b_{11} \cdot h_{11}^3}{12} + \left( z_T - \frac{h_{11}}{2} \right)^2 \cdot b_{11} \cdot h_{11} + 2 \cdot \left[ \frac{b_{22} \cdot h_{22}^3}{12} + \left( h_{11} + \frac{h_{22}}{2} - z_T \right)^2 \cdot b_{22} \cdot h_{22} \right] + \frac{b_{33} \cdot h_{33}^3}{12} \\
 &\quad + \left( h_{11} + h_{22} - \frac{h_{33}}{2} - z_T \right)^2 \cdot b_{33} \cdot h_{33}, & (5.1.18)
 \end{aligned}$$

Dosadíme a dopočteme

$$\begin{aligned}
 J_{Y_T} &= \frac{140 \cdot 6^3}{12} + \left( 28,48 - \frac{6}{2} \right)^2 \cdot 140 \cdot 6 + 2 \cdot \left[ \frac{6 \cdot 54^3}{12} + \left( 6 + \frac{54}{2} - 28,48 \right)^2 \cdot 6 \cdot 54 \right] \\
 &\quad + \frac{108 \cdot 6^3}{12} + \left( 6 + 54 - \frac{6}{2} - 28,48 \right)^2 \cdot 108 \cdot 6 \\
 J_{Y_T} &= 1247597,42 \text{ mm}^4 = \underline{1,25 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4}. & (5.1.19)
 \end{aligned}$$

Ve svislých prutech je kombinované namáhání ohybu a tahu, kde pro maximální hodnotu ohybového momentu můžeme psát

$$\sigma_V = \frac{F + q \cdot p}{S} \pm \frac{M_0(l)}{J_{Y_T}} \cdot z_{MAX}, \quad (5.1.20)$$



kde

$$z_{MAX} = h_{11} + h_{22} - z_T = 6 + 54 - 28,48 = \underline{31,52 \text{ mm}}. \quad (5.1.21)$$

Dále tahové napětí

$$\sigma_t = \frac{F + q \cdot p}{S} = \frac{17830 + 8,14 \cdot 455}{2136} = \underline{10,08 \text{ MPa}} \quad (5.1.22)$$

a napětí v ohybu v krajním vlákne

$$\sigma_{oMAX} = \frac{M_0(l)}{J_{Y_T}} \cdot z_{MAX} = \frac{226700}{1247597,42} \cdot 31,52 = \underline{5,73 \text{ MPa}}. \quad (5.1.23)$$

Poté vychází výsledné napětí

$$\sigma_V = 10,08 \pm 5,73 = \left\{ \begin{array}{l} 15,81 \text{ MPa} \\ 4,35 \text{ MPa} \end{array} \right. \quad (5.1.24)$$

Pevnostní podmínka pro jednoosou napjatost má tvar

$$\sigma_V \leq \sigma_{DOV} \quad (5.1.25)$$

kde

$\sigma_{DOV}$  pro běžnou konstrukční ocel je  $160 \text{ MPa}$ , poté

$$\underline{15,81 \leq 160 \text{ MPa} - \text{vyhovuje.}}$$

Pro výpočet deformace vycházíme z prostého Hookeova zákona, kde počítáme s větší hodnotou výsledného napětí

$$\sigma_V = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{\Delta l}{l} \quad (5.1.25)$$

$$\Delta l = \frac{\sigma_V \cdot l}{E} = \frac{15,81 \cdot 2400}{2,1 \cdot 10^5} = \underline{0,18 \text{ mm}}. \quad (5.1.25)$$

## 5.1.2 Nosník zatížený koly vozíku

Dále bude spočítán nosník pod kolejnicemi zatížený hmotností důlního vozíku.

**Zatížení:**

$m_V$  – hmotnost plně naloženého důlního vozíku

$g$  – gravitační konstanta

Tíhová síla působící od jednoho kola vozíku:

$$F = \frac{m_V}{4} \cdot g = \frac{1390}{4} \cdot 9,81 = \underline{3409 \text{ N}} \quad (5.1.26)$$

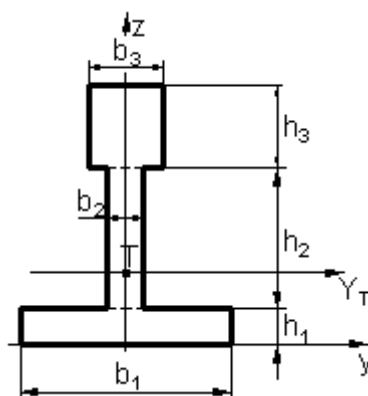
**Rozměry nosníku:**

$$a = 225 \text{ mm}, \quad b = 350 \text{ mm}$$

**Rozměry příčného průřezu nosníku:**

$$b_1 = 100 \text{ mm}, \quad h_1 = 6 \text{ mm}, \quad b_2 = 6 \text{ mm}, \quad h_2 = 135 \text{ mm}$$

Nejprve si pro účely pozdějších výpočtů spočteme moment setrvačnosti příčného průřezu nosníku k ose  $Y_T$ .



Obr. 5.1.5 – příčný průřez nosníku

Z rovnosti statických momentů určíme svislou polohu těžiště

$$\begin{aligned} z_T &= \frac{\sum S_i \cdot z_i}{\sum S_i} = \frac{b_1 \cdot h_1 \cdot \frac{h_1}{2} + b_2 \cdot h_2 \cdot \left(h_1 + \frac{h_2}{2}\right) + b_3 \cdot h_3 \cdot \left(h_1 + h_2 + \frac{h_3}{2}\right)}{b_1 \cdot h_1 + b_2 \cdot h_2 + b_3 \cdot h_3} \\ &= \frac{100 \cdot 6 \cdot \frac{100}{2} + 6 \cdot 94 \cdot \left(6 + \frac{94}{2}\right) + 30 \cdot 41 \cdot \left(6 + 94 + \frac{41}{2}\right)}{100 \cdot 6 + 6 \cdot 135} \\ z_T &= \underline{86,93 \text{ mm}}. \end{aligned} \quad (5.1.27)$$

Při výpočtu momentu setrvačnosti k ose  $Y_T$  využíváme Steinerovu větu

$$J_{Y_T} = J_{Y_{T1}} + a_1^2 \cdot S_1 + J_{Y_{T2}} + a_2^2 \cdot S_2 \quad (5.1.28)$$

Moment setrvačnosti obdélníka je

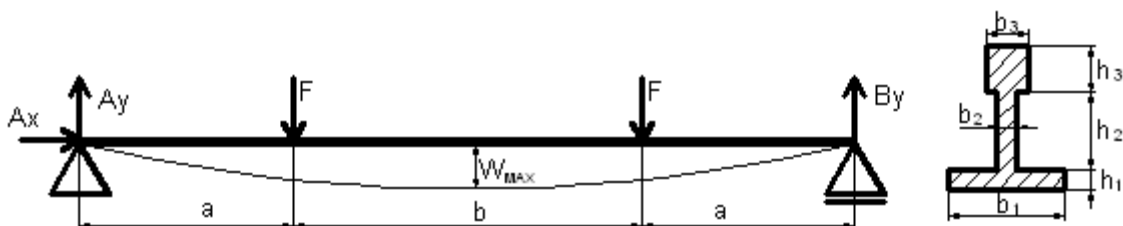
$$J_{Y_{T\Box}} = \frac{b \cdot h^3}{12}, \quad (5.1.29)$$

dosadíme a dopočteme

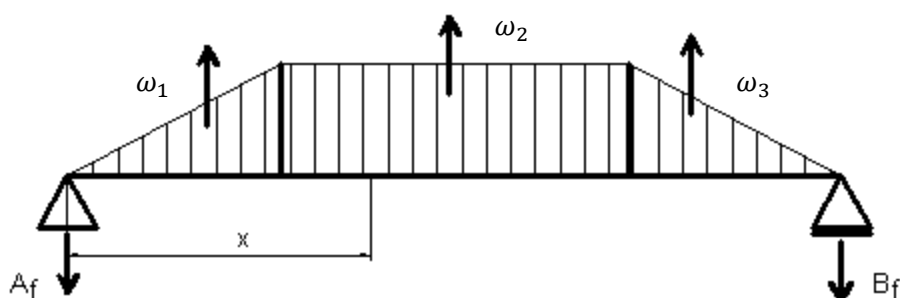
$$\begin{aligned} J_{Y_T} &= \frac{b_1 \cdot h_1^3}{12} + \left(z_T - \frac{h_1}{2}\right)^2 \cdot b_1 \cdot h_1 + \frac{b_2 \cdot h_2^3}{12} + \left(z_T - h_1 + \frac{h_2}{2}\right)^2 \cdot b_2 \cdot h_2 + \frac{b_3 \cdot h_3^3}{12} \\ &\quad + \left(h_1 + h_2 + \frac{h_3}{2} - z_T\right)^2 \cdot b_3 \cdot h_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{Y_T} &= \frac{100 \cdot 6^3}{12} + \left(86,93 - \frac{6}{2}\right)^2 \cdot 100 \cdot 6 + \frac{6 \cdot 94^3}{12} + \left(86,93 - 6 + \frac{94}{2}\right)^2 \cdot 6 \cdot 94 \\
&\quad + \frac{30 \cdot 41^3}{12} + \left(6 + 94 + \frac{41}{2} - 86,93\right)^2 \cdot 30 \cdot 41 \\
J_{Y_T} &= \underline{6851385 \text{ mm}^4} = \underline{6,851 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4}
\end{aligned} \tag{5.1.30}$$

Nosník spočítáme metodou momentových ploch (také nazývána Mohrova).



Obr. 5.1.6 – Nosník zatížený silami od kol vozíku



Obr. 5.1.6 – Fiktivní nosník zatížený spojitě od momentové plochy

Sestavíme podmínky rovnováhy a určíme reakce v podporách

$$\begin{aligned}
\sum F_i x &= 0; \quad Ax = 0 \\
\sum F_i y &= 0; \quad Ay + By - 2F = 0 \\
\sum M_i &= 0; \quad By \cdot (2a + b) - F \cdot (a + b) - F \cdot a = 0 \\
Ay &= F = 3409 \text{ N}; \quad By = 3409 \text{ N}
\end{aligned} \tag{5.1.31}$$

Na obr. 5.1.6 je fiktivní nosník zatížený spojitým zatížením momentové plochy, který splňuje okrajové podmínky v bodech A,B:

$$\begin{aligned}
w_A &= 0, & M_{fA} &= 0 \\
\varphi_A &\neq 0, & T_{fA} &\neq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}w_B &= 0, & M_{fB} &= 0 \\ \varphi_B &\neq 0, & T_{fB} &\neq 0\end{aligned}$$

Momentovou plochu jsme rozdělili na dva trojúhelníky a jeden obdélník a tyto obrazce nahradili silami působícími v těžištích takto vzniklých ploch. Velikosti sil jsou

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \frac{F \cdot a^2}{2} \\ \omega_2 &= F \cdot a \cdot b \\ \omega_3 &= \frac{F \cdot a^2}{2}\end{aligned}$$

Dále z rovnic rovnováhy fiktivního nosníku určíme reakce

$$\begin{aligned}\sum F_i y &= 0; & A_f + B_f - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3 &= 0 \\ \sum M_i &= 0; & A_f \cdot (2a + b) - \omega_1 \cdot \left(a + b + \frac{a}{3}\right) - \omega_2 \cdot \left(a + \frac{b}{2}\right) - \omega_3 \cdot \frac{2a}{3} &= 0\end{aligned}$$

Dosadíme fiktivní síly

$$\begin{aligned}A_f + B_f - \frac{F \cdot a^2}{2} - F \cdot a \cdot b - \frac{F \cdot a^2}{2} &= 0 \\ A_f \cdot (2a + b) - \frac{F \cdot a^2}{2} \cdot \left(a + b + \frac{a}{3}\right) - F \cdot a \cdot b \cdot \left(a + \frac{b}{2}\right) - \frac{F \cdot a^2}{2} \cdot \frac{2a}{3} &= 0\end{aligned}$$

A z této soustavy rovnic dopočteme reakce

$$A_f = \frac{F \cdot \left(a^3 + \frac{3 \cdot a^2 \cdot b}{2} + \frac{a \cdot b^2}{2}\right)}{(2a + b)} \quad (5.1.32)$$

$$B_f = \frac{F \cdot \left(a^3 + \frac{3 \cdot a^2 \cdot b}{2} + \frac{a \cdot b^2}{2}\right)}{(2a + b)} \quad (5.1.33)$$

Hodnota maximálního průhybu se nachází ve střední části nosníku mezi zatěžujícími silami, proto zavedeme obecnou souřadnici  $x$  viz obr. 5.1.6 a k tomuto bodu spočítáme fiktivní ohybový moment.

Vztah pro výpočet průhybu pomocí fiktivního momentu je

$$w_{(x)} = \frac{M_{f(x)}}{EJ_Y} \quad (5.1.34)$$

Ohybový moment k bodu  $x$

$$M_{f(x)} = -A_f \cdot x + \omega_1 \cdot \left(x - \frac{2a}{3}\right) + F \cdot a \cdot (x - a) \cdot \frac{(x - a)}{2}$$

Dosadíme fiktivní síly a reakce

$$M_{f(x)} = \frac{-F \cdot \left( a^3 + \frac{3 \cdot a^2 \cdot b}{2} + \frac{a \cdot b^2}{2} \right)}{(2a + b)} \cdot x + \frac{F \cdot a^2}{2} \cdot \left( x - \frac{2a}{3} \right) + F \cdot a \cdot (x - a) \cdot \frac{(x - a)}{2}$$

Po úpravě

$$M_{f(x)} = F \cdot \left[ \frac{-a^3 \cdot x - \frac{3a^2 \cdot b \cdot x}{2} - \frac{a \cdot b^2 \cdot x}{2}}{(2a + b)} + \frac{-3a^2 \cdot x + a^3 + 3a \cdot x^2}{6} \right]$$

Po dosazení do vztahu (5.1.34) dostaneme rovnici průhybové křivky ve střední části nosníku

$$w_{(x)} = \frac{F}{EJ_Y} \cdot \left[ \frac{-a^3 \cdot x - \frac{3a^2 \cdot b \cdot x}{2} - \frac{a \cdot b^2 \cdot x}{2}}{(2a + b)} + \frac{-3a^2 \cdot x + a^3 + 3a \cdot x^2}{6} \right]$$

Je zřejmé, že největší hodnota průhybu je přesně uprostřed nosníku avšak, abychom si ověřili správnost předchozích výpočtů, nyní spočteme extrém průhybové křivky

$$\frac{dw_x}{dx} = 0 \quad (5.1.35)$$

$$\frac{dw_x}{dx} = \frac{F}{EJ_Y} \cdot \left[ \frac{-a^3 - \frac{3a^2 \cdot b}{2} - \frac{a \cdot b^2}{2}}{(2a + b)} + \frac{-3a^2 + 6a \cdot x}{6} \right] = 0$$

$$12a^2 \cdot x + 6a \cdot b \cdot x - 12a^3 - 12a^2 \cdot b - 3a \cdot b^2 = 0$$

$$x = \frac{12a^3 + 12a^2 \cdot b + 3a \cdot b^2}{(12a^2 + 6a \cdot b)}$$

Dosadíme rozměry nosníku

$$x = \frac{12 \cdot 225^3 + 12 \cdot 225^2 \cdot 350 + 3 \cdot 225 \cdot 350^2}{(12 \cdot 225^2 + 6 \cdot 225 \cdot 350)} = \underline{400 \text{ mm}} \quad (5.1.36)$$

- Maximální hodnota průhybu je skutečně ve středu nosníku.

Nyní dosadíme všechny vypočtené hodnoty a rozměry nosníku do rovnice průhybové křivky a dopočteme maximální průhyb, (modul pružnosti v tahu  $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ ).

$$w_{MAX} = \frac{F}{EJ_{Y_T}} \cdot \left[ \frac{-a^3 \cdot x - \frac{3a^2 \cdot b \cdot x}{2} - \frac{a \cdot b^2 \cdot x}{2}}{(2a + b)} + \frac{-3a^2 \cdot x + a^3 + 3a \cdot x^2}{6} \right]$$

$$w_{MAX} = \frac{3409}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 6851385} \cdot \left[ \frac{-225^3 \cdot 400 - \frac{3 \cdot 225^2 \cdot 350 \cdot 400}{2} - \frac{225 \cdot 350^2 \cdot 400}{2}}{(2 \cdot 225 + 350)} + \frac{-3 \cdot 225^2 \cdot 400 + 225^3 + 3 \cdot 225 \cdot 400^2}{6} \right]$$

$$w_{MAX} = \underline{-0,04 \text{ mm}} \quad (5.1.37)$$

Maximální napětí v ohýbaném nosníku je v krajních vláknech a vypočteme ho ze vz (5.1.38)

$$\sigma_{MAX} = \frac{M}{J_{Y_T}} \cdot z_T$$

$z_T$  - větší vzdálenost krajního vlákna od neutrální osy

Pro běžnou konstrukční ocel  $\sigma_{DOV} = 160 \text{ MPa}$ , při namáhání ohybem.

Maximální ohybový moment (5.1.39)

$$M = F \cdot a = 3409 \cdot 0,225 = \underline{767,03 \text{ Nm.}}$$

Maximální napětí tedy je

$$\sigma_{MAX} = \frac{767,03}{6,851 \cdot 10^{-6}} \cdot 8,693^{-2} = 9,73 \cdot 10^6 \text{ Pa} = \underline{9,73 \text{ MPa}}$$

Pro jednoosou napjatost můžeme psát pevnostní podmínku ve tvaru

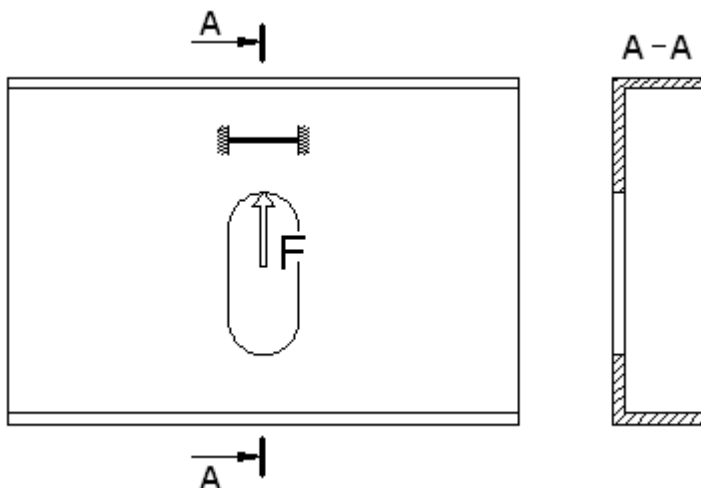
$$\sigma_{MAX} \leq \sigma_{DOV}$$

$$\underline{9,73 \leq 160 \text{ MPa} - \text{vyhovuje}}$$

### 5.1.3 Oka uchycení

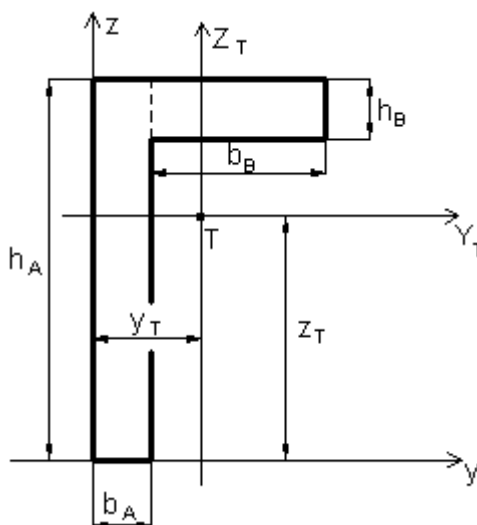
Posledním kontrolovaným prvkem jsou oka, na kterých těžní klec visí, a tedy nesou celou hmotnost klece plus hmotnost nákladu.

Oko zjednodušíme na oboustranně vetknutý nosník, viz obr. 5.1.7



Obr. 5.1.7 – Oko uchycení zjednodušené na vetknutý nosník

Nejdříve znovu vypočítáme moment setrvačnosti průřezu k těžištní ose  $Y_T$



Obr. 5.1.8 – Příčný průřez nosníku

**Rozměry příčného průřezu:**

$$b_A = 6 \text{ mm}, \quad h_A = 165 \text{ mm}, \quad b_B = 74 \text{ mm}, \quad h_B = 6 \text{ mm}.$$

Polohu těžiště určíme z rovnosti statických momentů

$$y_T = \frac{\sum S_i \cdot y_i}{\sum S_i} = \frac{b_A \cdot h_A \cdot \frac{b_A}{2} + b_B \cdot h_B \cdot \left(b_A + \frac{b_B}{2}\right)}{b_A \cdot h_A + b_B \cdot h_B} = \frac{6 \cdot 165 \cdot \frac{6}{2} + 74 \cdot 6 \cdot \left(6 + \frac{74}{2}\right)}{6 \cdot 165 + 74 \cdot 6}$$

$$y_T = \underline{15,38 \text{ mm}} \quad (5.1.40)$$

$$z_T = \frac{\sum S_i \cdot z_i}{\sum S_i} = \frac{b_A \cdot h_A \cdot \frac{h_A}{2} + b_B \cdot h_B \cdot \left(h_A - \frac{h_B}{2}\right)}{b_A \cdot h_A + b_B \cdot h_B} = \frac{6 \cdot 165 \cdot \frac{165}{2} + 74 \cdot 6 \cdot \left(165 - \frac{6}{2}\right)}{6 \cdot 165 + 74 \cdot 6}$$

$$z_T = \underline{107,12 \text{ mm.}} \quad (5.1.41)$$

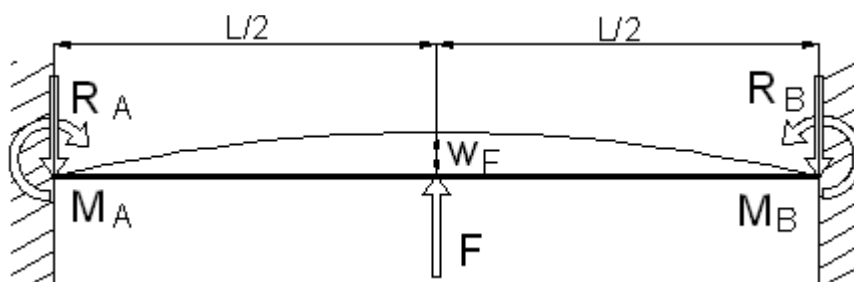
Dále využíváme Steinerovu větu a vzorec pro obdélník

$$J_{Y_T} = J_{Y_{T_A}} + J_{Y_{T_B}} \quad (5.1.41)$$

$$J_{Y_T} = \frac{b_A \cdot h_A^3}{12} + \left(z_T - \frac{h_A}{2}\right)^2 \cdot b_A \cdot h_A + \frac{b_B \cdot h_B^3}{12} + \left(h_A - z_T - \frac{h_B}{2}\right)^2 \cdot b_B \cdot h_B$$

$$J_{Y_T} = \frac{6 \cdot 165^3}{12} + \left(107,12 - \frac{165}{2}\right)^2 \cdot 6 \cdot 165 + \frac{74 \cdot 6^3}{12} + \left(165 - 107,12 - \frac{6}{2}\right)^2 \cdot 74 \cdot 6$$

$$J_{Y_T} = 4\,184\,723 \text{ mm}^4 = \underline{4,18 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4}$$



Obr. 5.1.9 – Oboustranně vetknutý nosník

**Délka nosníku:**  $L = 0,09 \text{ m}$

Na obr. 5.1.9 je oboustranně vetknutý nosník zatížený ve středu silou  $F$ , která je dána

$m_{CK}$  - hmotnost celé klece

$m_v$  - hmotnost plně naloženého vozíku

$g$  - gravitační konstanta

$$F = \frac{m_{CK} \cdot g + (4 \cdot m_v) \cdot g}{2} \quad (5.1.41)$$

$$F = \frac{3900 \cdot 9,81 + (4 \cdot 1390) \cdot 9,81}{2} = \underline{46400 \text{ N}}$$

Ze statických podmínek rovnováhy plyne

$$M_A = M_B$$

$$R_A = R_B = \frac{F}{2} = \frac{46400}{2} = \underline{23200 \text{ N.}}$$



Pro určení zbylého momentu  $M_A$  využijeme deformační podmínku pro úhel natočení ve vetknutí

$$\Delta\varphi_A = 0 \quad (5.1.42)$$

Při využití symetrie můžeme psát

$$\Delta\varphi_A = \frac{2}{EJ} \cdot \left[ \int_0^{L/2} M_o(x) \cdot \frac{\partial M_o(x)}{\partial M_A} dx \right] = 0 \quad (5.1.43)$$

kde

$$M_o(x) = \frac{F}{2} \cdot x + M_A \quad (5.1.44)$$

a

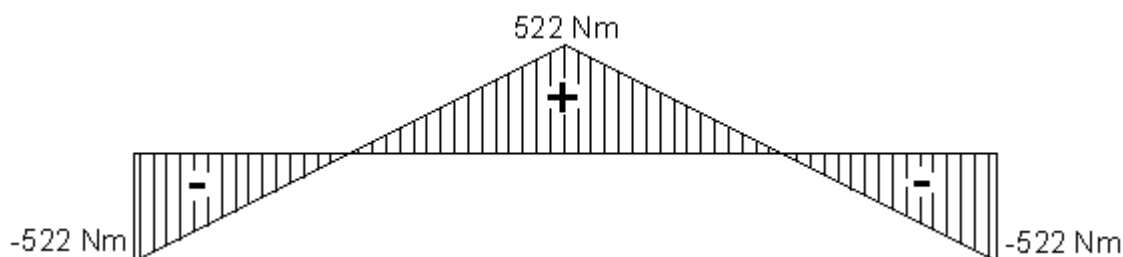
$$\frac{\partial M_o(x)}{\partial M_A} = 1. \quad (5.1.45)$$

Dosadíme

$$\Delta\varphi_A = \frac{2}{EJ} \cdot \left[ \int_0^{L/2} \left( \frac{F}{2} \cdot x + M_A \right) dx \right] = 0.$$

Po integraci a úpravách dopočteme reakci  $M_A$

$$M_A = -\frac{F \cdot L}{8} = -\frac{46400 \cdot 0,09}{8} = \underline{\underline{-522 \text{ Nm}}}$$



Obr. 5.1.10 Průběh momentu podél nosníku

Dále vypočteme průhyb pod silou  $F$ , kde vycházíme z Castiglianovy věty a využíváme symetrie nosníku

$$w_F = \frac{2}{EJ} \cdot \left[ \int_0^{L/2} M_o(x) \cdot \frac{\partial M_o(x)}{\partial F} dx \right] \quad (5.1.46)$$

Do rovnice momentu (5.1.44), vyjádřeném souřadnicí  $x$ , dosadíme vypočtený moment  $M_A$

$$M_o(x) = \frac{F}{2} \cdot x - \frac{F \cdot L}{8}$$

a derivujeme podle síly  $F$

$$\frac{\partial M_o(x)}{\partial F} = \frac{x}{2}.$$

Dosadíme

$$w_F = \frac{2}{EJ} \cdot \left[ \int_0^{L/2} \left( \frac{F}{2} \cdot x - \frac{F \cdot L}{8} \right) \cdot \frac{x}{2} dx \right]$$

Po integraci a úpravě, vyjádříme průhyb pod silou  $F$

$$w_F = \frac{1}{192} \cdot \frac{F \cdot L^3}{EJ} \quad (5.1.47)$$

Dosadíme hodnoty a dopočteme

$$w_F = \frac{1}{192} \cdot \frac{46400 \cdot 90^3}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 4\,184\,723} = \underline{2 \cdot 10^{-4} \text{ mm}}$$

Napětí v krajním vlákně nosníku vypočteme ze vztahu

$$\sigma_{MAX} = \frac{M_{oMAX}}{J_{YT}} \cdot z_{MAX} \quad (5.1.48)$$

kde

$$M_{oMAX} = \frac{F \cdot L}{8} = \frac{46400 \cdot 0,09}{8} = 522 \text{ Nm} = 522000 \text{ Nmm}$$

a

$$z_{MAX} = z_T = 107,12 \text{ mm}.$$

Po dosazení

$$\sigma_{MAX} = \frac{522000}{4\,184\,723} \cdot 107,12 = \underline{13,36 \text{ MPa}}$$

Pro běžnou konstrukční ocel  $\sigma_{DOV} = 160 \text{ MPa}$ , při namáhání ohybem.

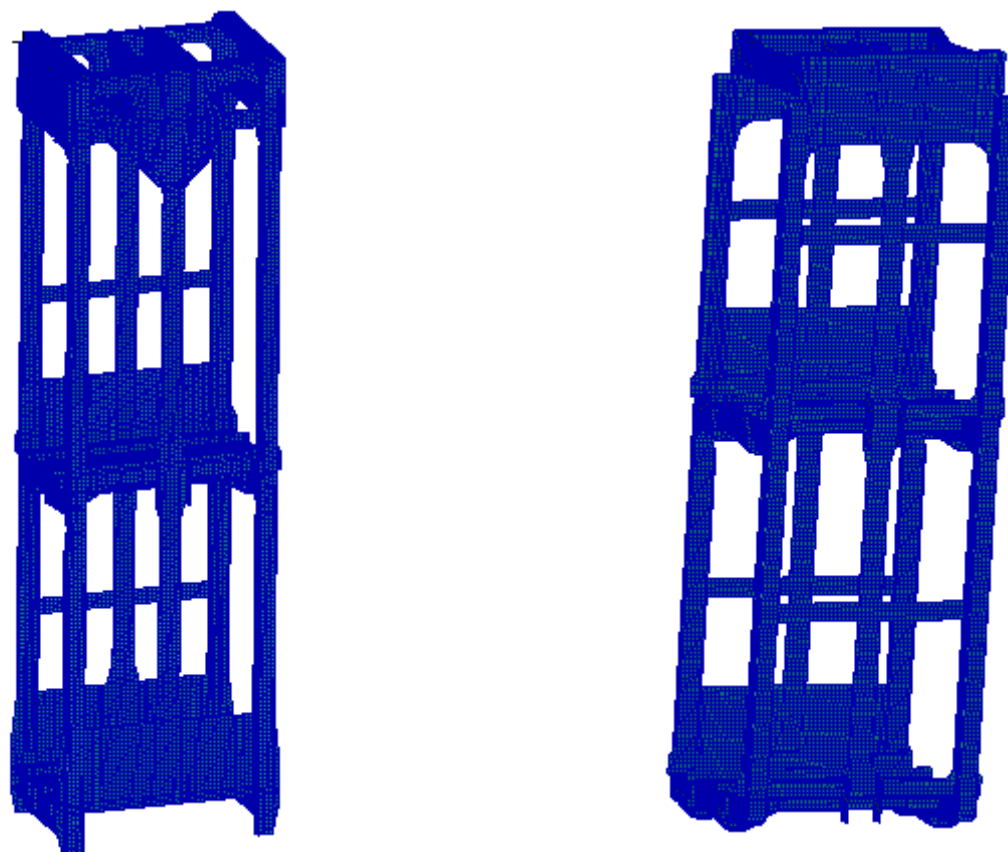
$$\sigma_{MAX} \leq \sigma_{DOV}$$

$$\underline{13,36 \leq 160 \text{ MPa} - \text{vyhovuje}}$$

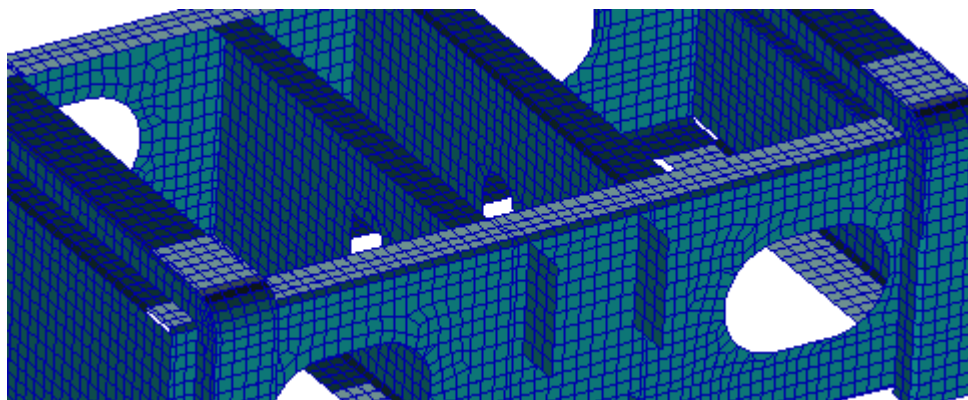
## 5.2 Numerická simulace

### 5.2.1 Vytvoření konečnoprvkového modelu

Nejprve byla každá součást modelu převedena na střední plochy, z důvodu použití plošných prvků. Model s vytvořenou sítí je zobrazen na obr. 5.2.1, detail sítě poté na obr. 5.2.2. Použité prvky jsou na většině modelu 4uzlové s použitím IsoMesheru a průměrná velikost prvku je 25 mm. Model obsahuje 164 682 elementů.



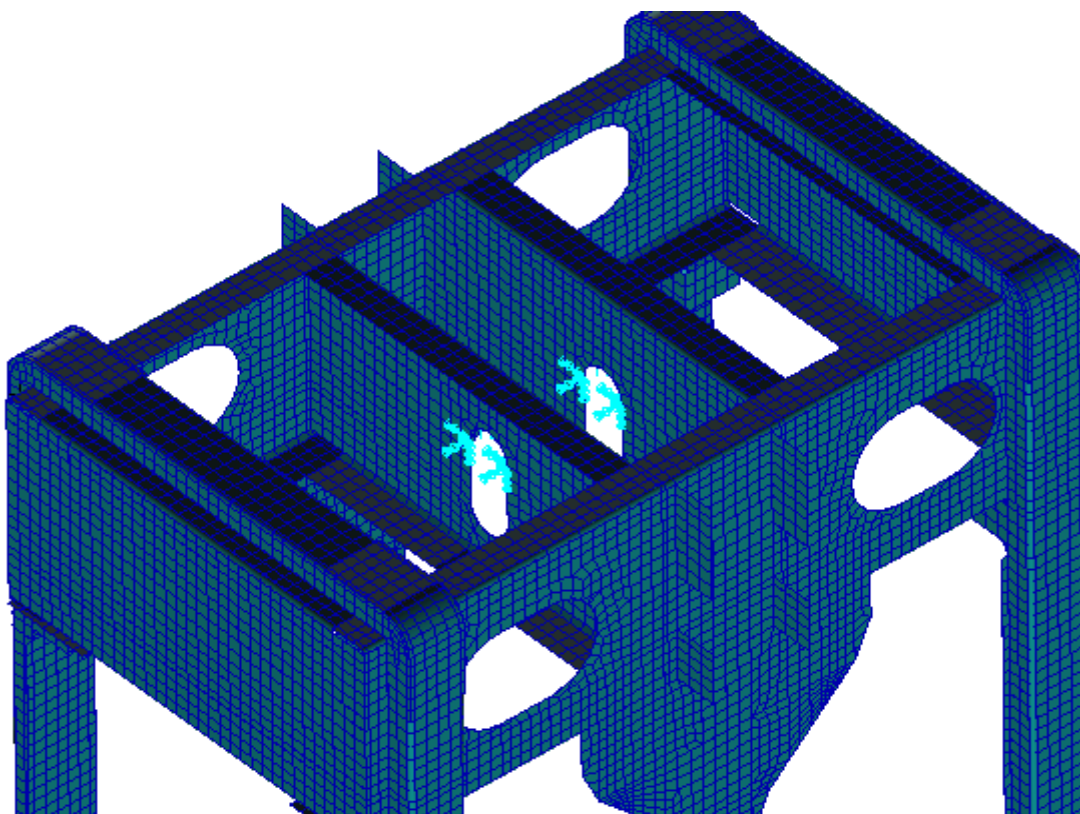
Obr. 5.2.1 horní a spodní díl klece s vytvořenou sítí



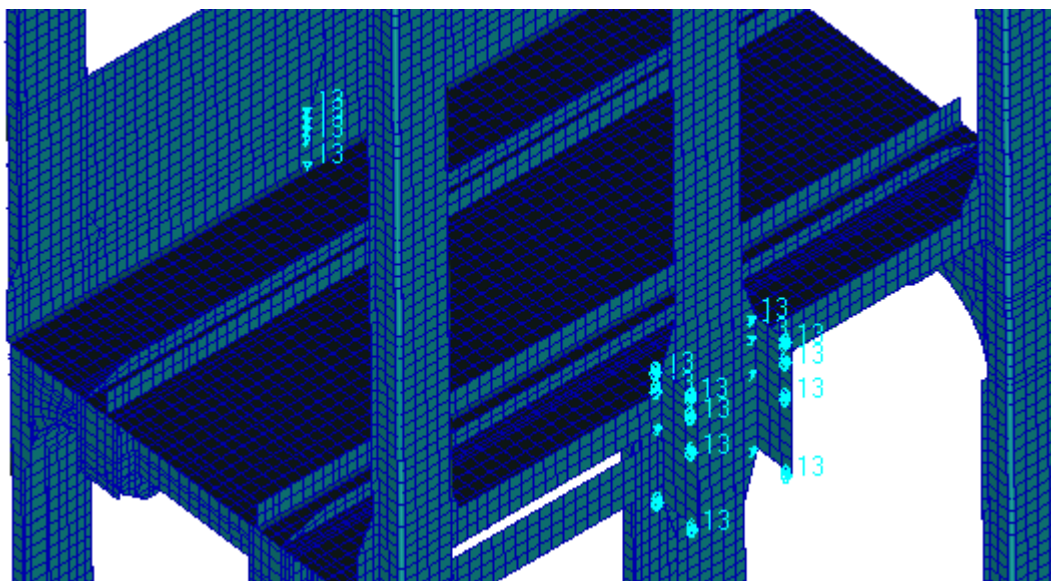
Obr. 5.2.2 Detail vytvořené sítě na hlavě klece

### 5.2.2 Zadání materiálových vlastností a okrajových podmínek

Jako materiál modelu byla zvolena běžná konstrukční ocel, pro kterou platí Poissonova konstanta  $\mu = 0,3$  a modul pružnosti v tahu  $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ . Klec je zavěšena v hlavě na dvou okách. Na půlkruhovou křivku těchto ok bylo aplikováno vetknutí, viz obr. 5.2.3. Dále je klec vedena po průvodnici ve vodičkách umístěných po celé délce přední a zadní strany klece. V každém vodičku bylo zabráněno pohybu ve směru os  $x$  a  $z$ , pohyb je umožněn pouze v ose  $y$ , viz obr. 5.2.4.



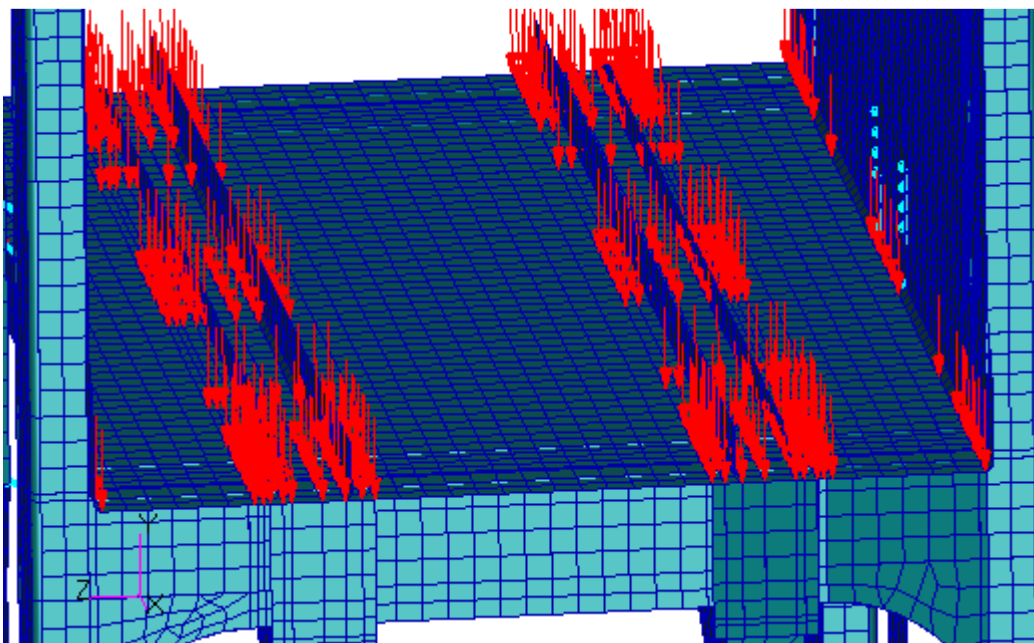
Obr. 5.2.3 – Aplikace vetknutí na oka klece



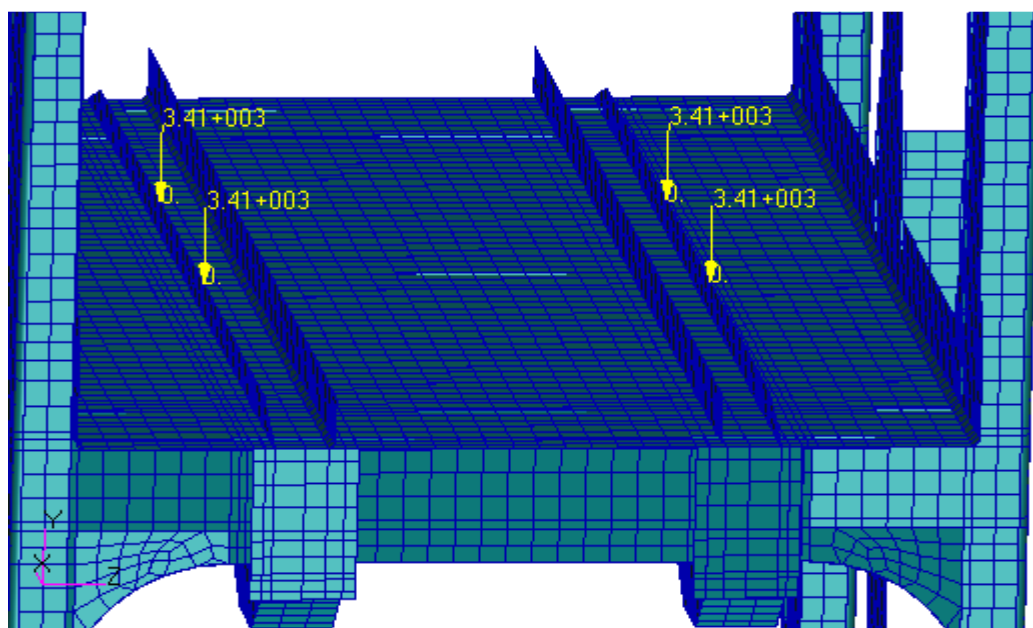
Obr. 5.2.4 – Aplikace okrajových podmínek na vodička klece

### 5.2.3 Zadání zatížení

Výpočet byl proveden pro 2 druhy zatížení. V prvním případě je v každé etáži po šesti lidech o celkové hmotnosti  $480\text{ kg}$ , proto bylo aplikováno tlakové zatížení na celou plochu etáže o hodnotě  $p = 4 \cdot 10^{-3}\text{ MPa}$ . Zatížení je zobrazeno na obr. 5.2.5. Ve druhém případě aplikujeme zatížení od hmotnosti plně naložených důlních vozíků. Hmotnost jednoho vozíku  $m = 1390\text{ kg}$  se rozkládá na 4 kola, tedy síla působící jedním kolem na kolejnici je  $F = 3410\text{ N}$ . Zobrazení tohoto zatížení je na obr. 5.2.6.



Obr. 5.2.5 – Aplikace plošného zatížení v etáži klece



Obr.5.2.6 – Aplikace sil od kol vozíku

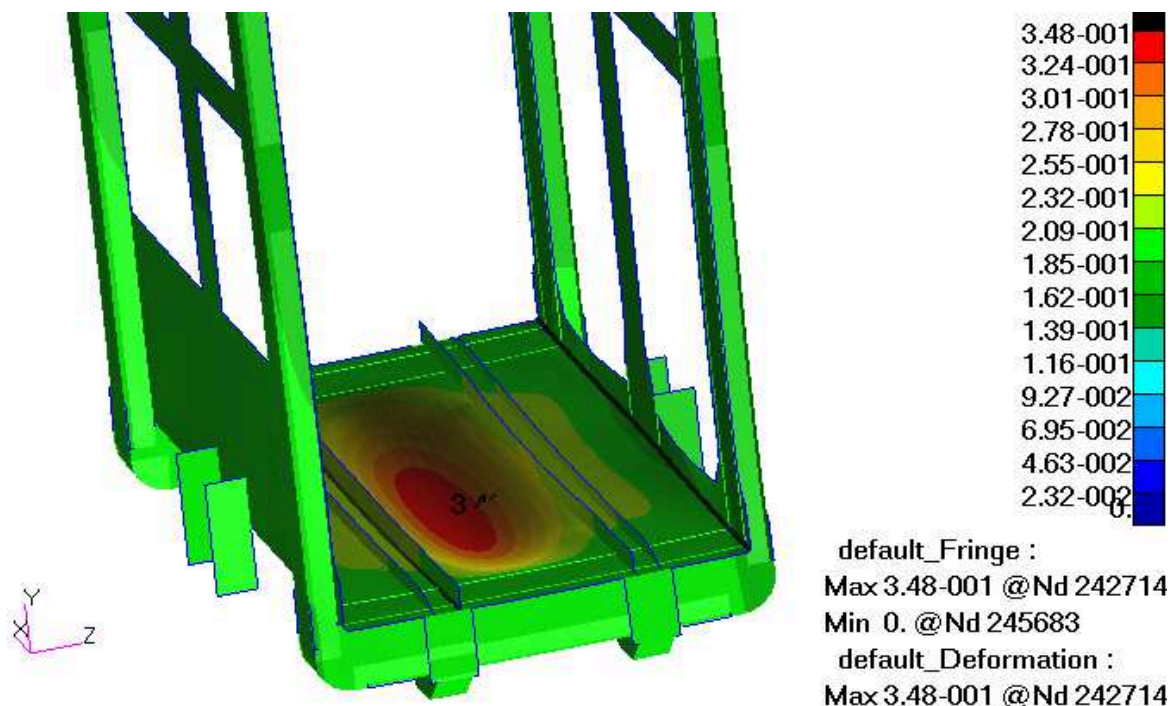


## 5.2.4 Vyhodnocení výpočtu

Výsledky jsou u zatížení přepravou osob, tak i u zatížení důlními vozíky spojeny se zatížením vlastní tíhy klece.

### První varianta zatížení – přeprava osob

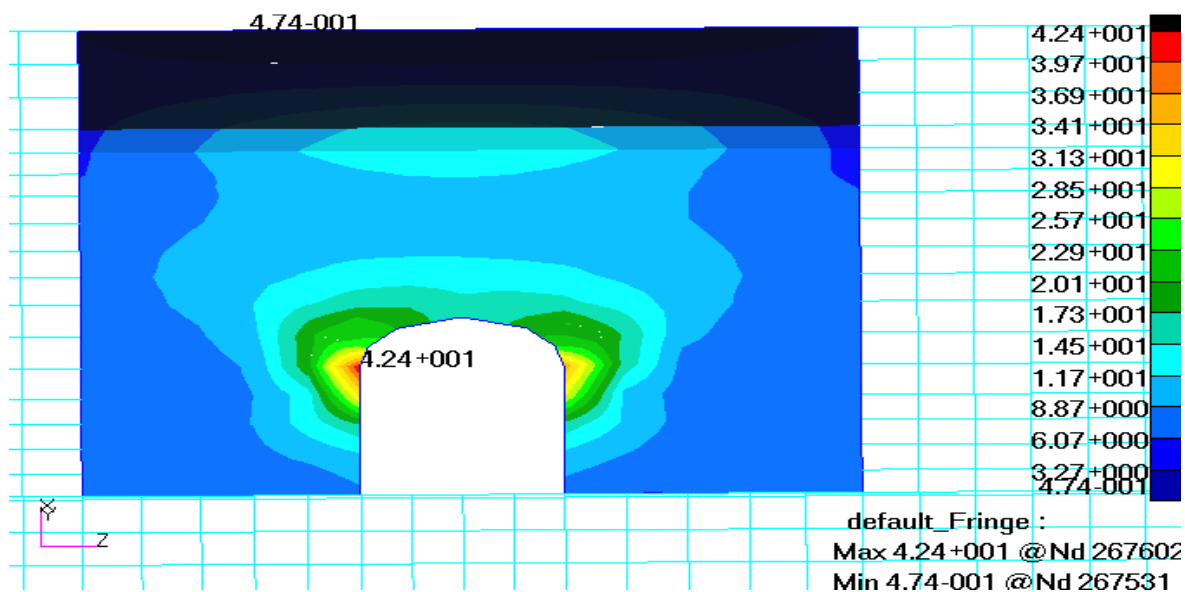
Vyhodnocení posuvů v kleci:



Obr. 5.2.7 – Zobrazení největšího posunutí při zatížení přepravou osob

K celkovému největšímu posunutí dochází ve spodním patře klece a jeho hodnota je 0,35 mm, deformace je zobrazena na obr. 5.2.7.

Vyhodnocení napjatosti v kleci:



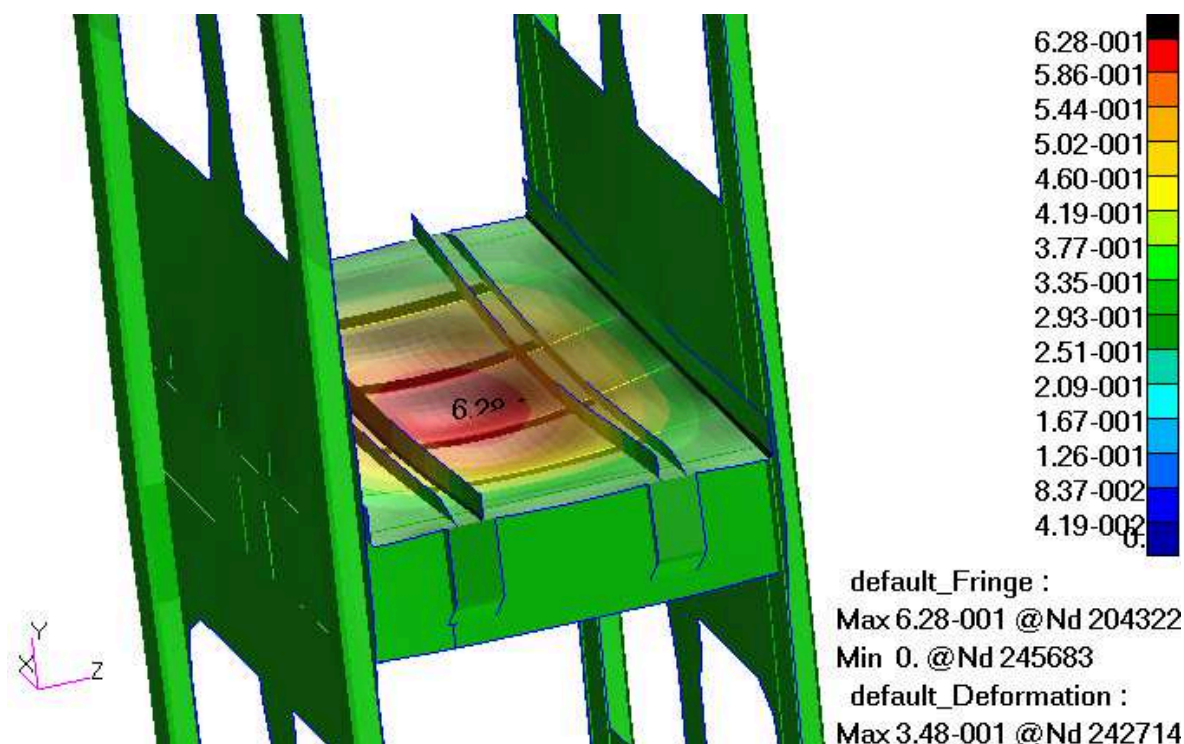
Obr. 5.2.8 – Největší hodnota napětí je v uchycení klece

Na obr. 5.2.8 je zobrazena maximální hodnota redukovaného napětí metodou HMM a to  $42,4 \text{ Mpa}$ . Tohoto napětí je dosaženo v oku klece, na kterém je uchycena.

### Druhá varianta zatížení – přeprava důlních vozíků

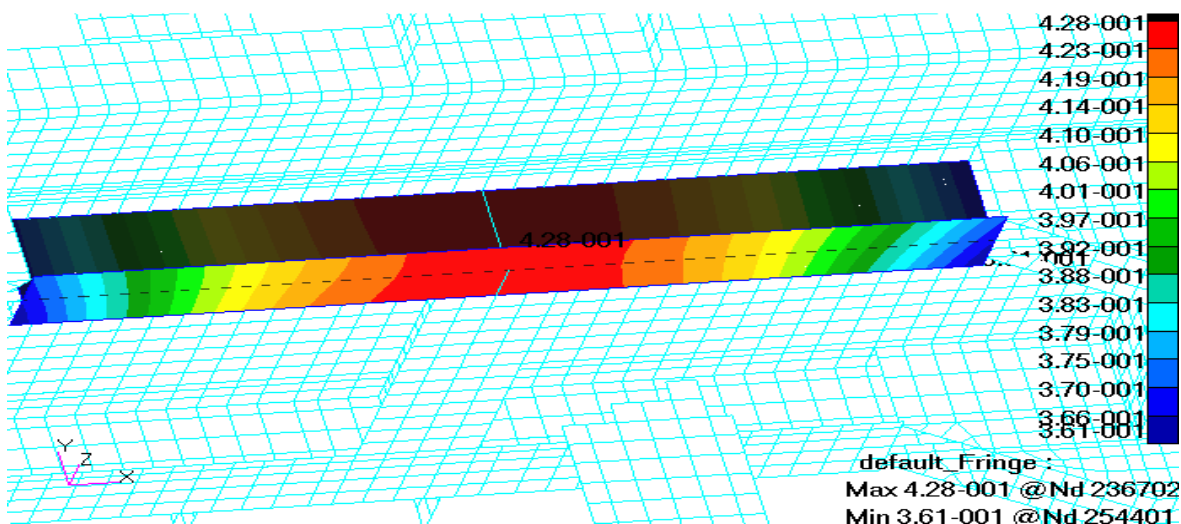
Tyto hodnoty jsou určeny únosnosti mnohem důležitější, neboť zatížení od plně naložených důlních vozíků je značně vyšší než u přepravy osob.

Vyhodnocení posuvů v kleci:



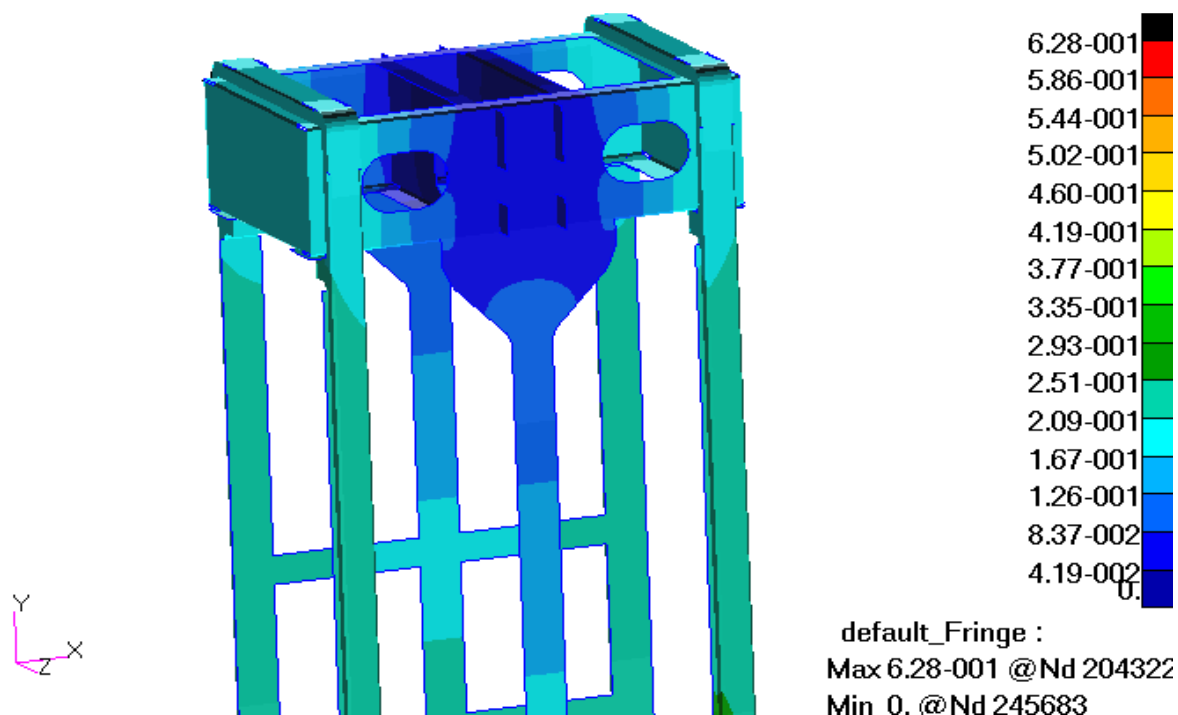
Obr. 5.2.9 – Zobrazení největšího celkového posunutí v kleci

Při zatížení důlními vozíky dochází k celkovému největšímu posunutí ve středním patře klece, kde je nosná deska nejméně vyztužena, oproti deskám v ostatních etážích. Hodnota posunutí je  $0,63 \text{ mm}$  a deformace je zobrazena na obr. 5.2.9.



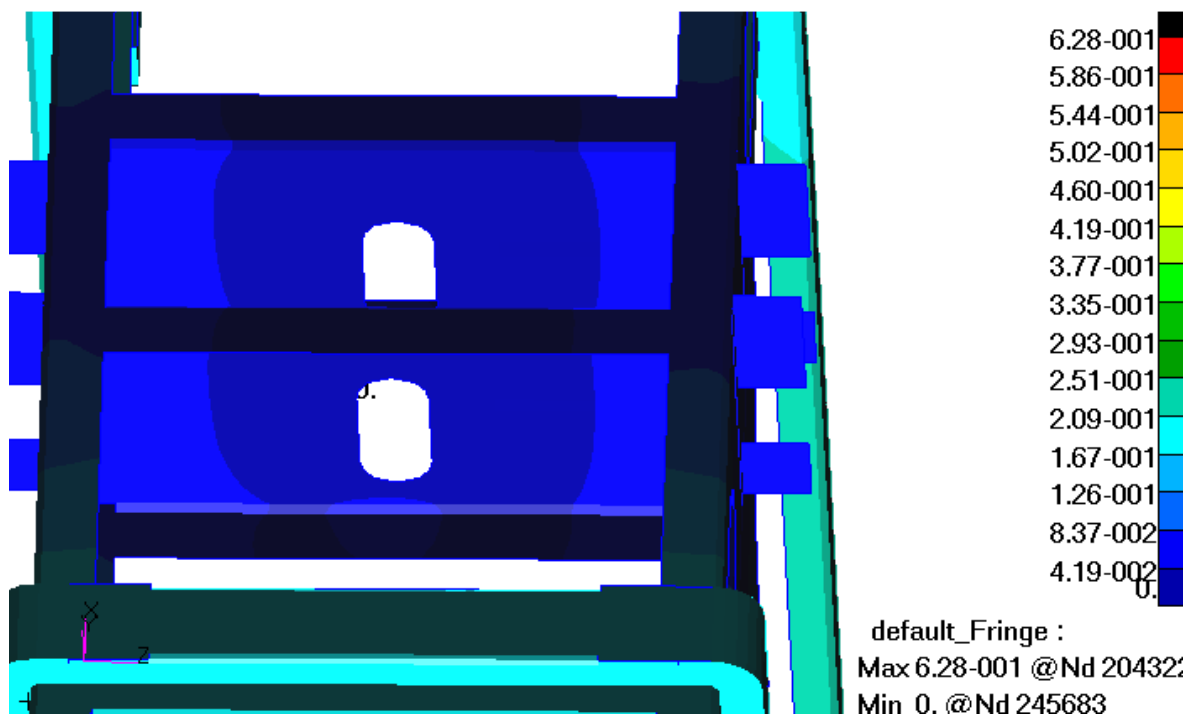
Obr. 5.2.10 – Zobrazení posunutí v nosníku pod kolejnici

Na obr. 5.2.10 je zobrazen nosník, který se nachází pod kolejnicí, ve kterém je maximální hodnota celkového posunutí  $0,43 \text{ mm}$ . Výsledná hodnota posunutí středu nosníku je dána rozdílem hodnoty středové a okrajové části nosníku vlivem superpozice posuvů. Výsledná hodnota je tedy  $0,06 \text{ mm}$ .



Obr. 5.2.11 – Zobrazení posuvů ve svislých prutech klece

Celkový posuv ve svislých prutech dosahuje průměrné hodnoty  $0,2 \text{ mm}$ .

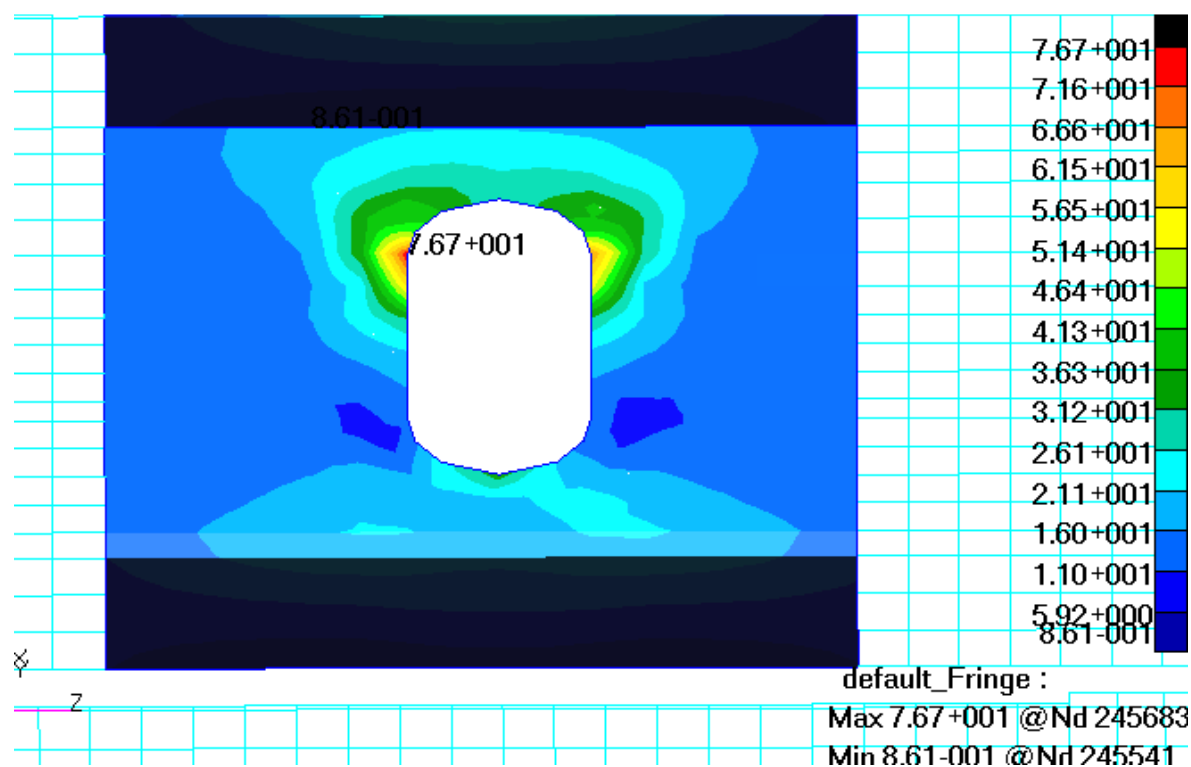


Obr. 5.2.12 – Zobrazení posuvů v okách uchycení

Posuv v okách uchycení se blíží nulovým hodnotám

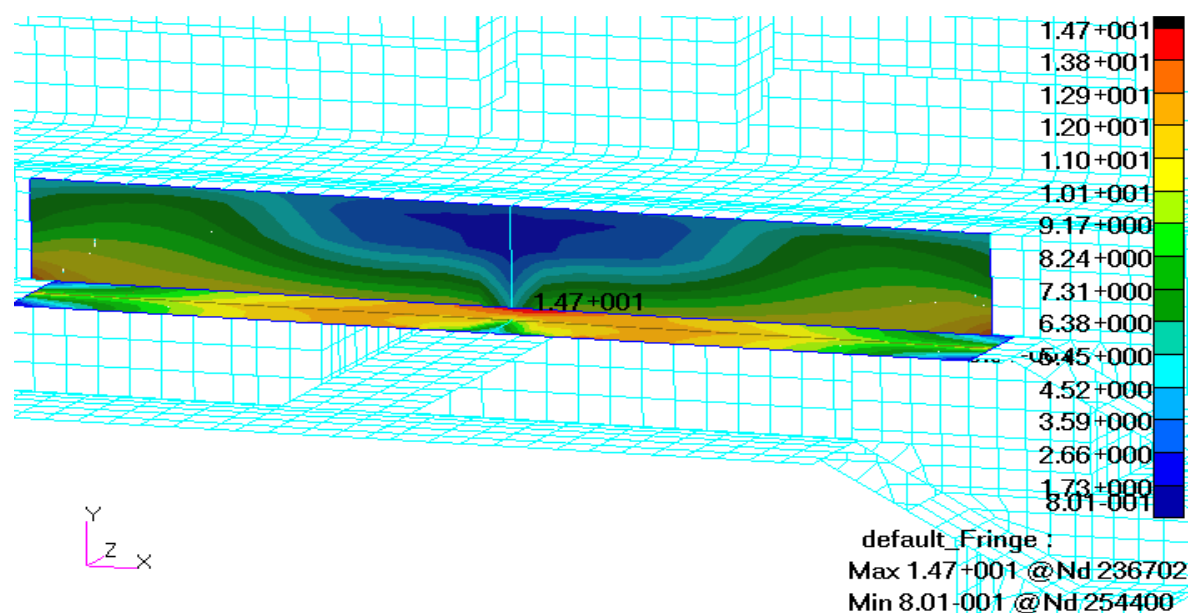


Vyhodnocení napjatosti v kleci:



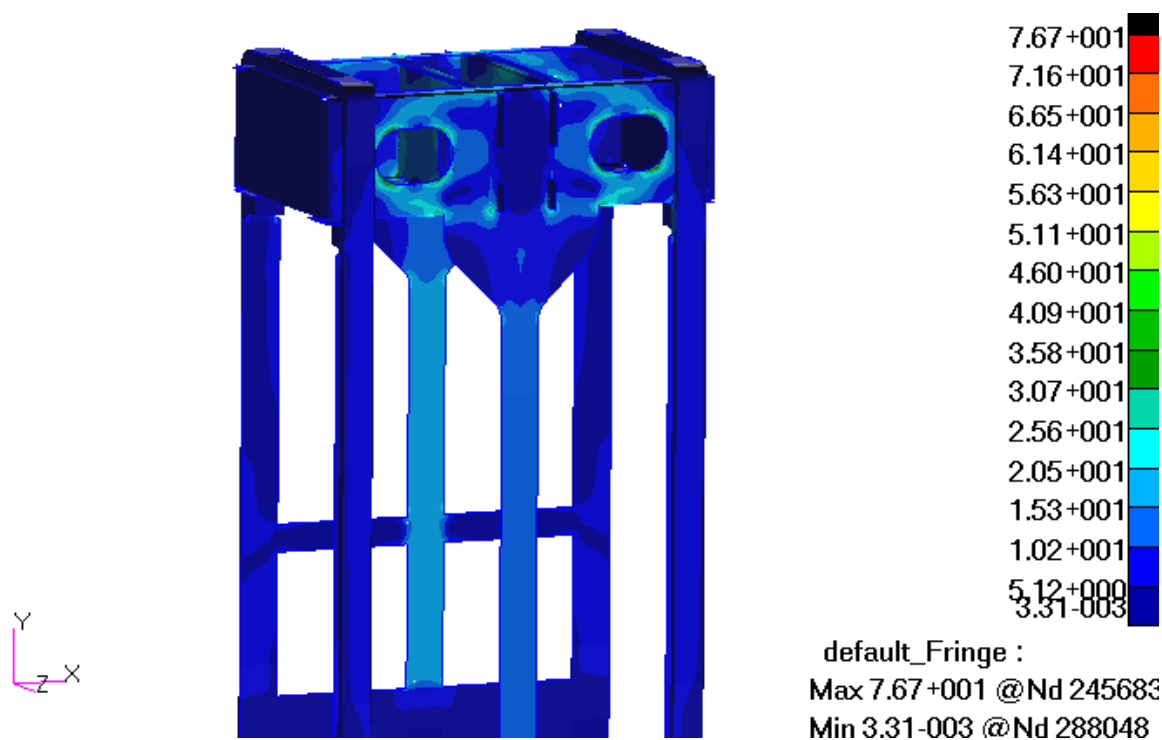
Obr. 5.2.13 – Zobrazení napětí v oku uchycení

Maximální napětí u druhé varianty zatížení je rovněž v oku uchycení a jeho hodnota dle HMM je 76,7 MPa. Střední hodnota napětí v oku je v průměru 16 MPa.



Obr. 5.2.14 – Zobrazení napětí v nosníku pod kolejnicí

V nosníku pod kolejnicí dosahuje maximální hodnota napětí 14,7 MPa a průměrná hodnota ve středu nosníku v krajních vláknech je 9 MPa.



Obr. 5.2.15 – Zobrazení napětí ve svislých prutech v horní části klece

Průměrné napětí ve svislých prutech dosahuje hodnoty 15 MPa.

## 6. Porovnání analytických výpočtů s numerickými

Srovnávání výsledků bylo provedeno vůči výsledkům numerickým

*NU* – numerický výpočet

*AN* – analytický výpočet

$$Rpzdíl = \frac{NU - AN}{NU} \cdot 100$$

### Oko uchycení

	Napětí [MPa]	Posuv [mm]
Analytické výpočty	13,36	$2 \cdot 10^{-4}$
Numerické výpočty	16	$2,1 \cdot 10^{-4}$
<b>Rozdíl [%]</b>	<b>17</b>	<b>5</b>

Tab. 1 – porovnání výsledků v oku uchycení

### Svislé pruty

	Napětí [ <i>MPa</i> ]	Posuv [ <i>mm</i> ]
Analytické výpočty	18,81	0,18
Numerické výpočty	15	0,20
<b>Rozdíl [%]</b>	<b>25</b>	<b>10</b>

Tab. 2 – porovnání výsledků ve svislých prutech

### Nosník pod kolejnici

	Napětí [ <i>MPa</i> ]	Posuv [ <i>mm</i> ]
Analytické výpočty	9,73	0,04
Numerické výpočty	9	0,06
<b>Rozdíl [%]</b>	<b>8</b>	<b>33</b>

Tab. 3 – porovnání výsledků v nosníku zatíženém koly vozíku

## 7. Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo provést statické výpočty nejvíce namáhaných částí 4etážové těžní klece a následně porovnat s řešením numerickým. V první variantě, zatížení přepravou osob, jsme numerickým výpočtem zjistili největší celkový posuv v dolním patře klece o hodnotě 0,35 *mm* a největší redukované napětí dle HMH se koncentruje v oku uchycení a jeho hodnota je 42,4 *Mpa*. Výsledky tohoto zatížení jsou však pro nás méně podstatné, neboť zatížení přepravou osob má znatelně menší vliv na deformace a napětí nežli zatížení důlními vozíky. Proto je prováděno porovnání výsledků pouze pro zatížení důlními vozíky.

U druhé varianty, zatížení plně naloženými důlními vozíky, byla numerickým výpočtem zjištěna maximální hodnota celkového posunutí 0,63 *mm* a to ve střední části klece kde je nosná deska nejméně vyztužena. Hodnota největšího redukovaného napětí dle HMH je v oku uchycení a to 76,7 *MPa*, jedná se však o špičkovou hodnotu. Srovnání numerických výpočtů s výpočty analytickými je provedeno v tab. 1 až 3. Z důvodů značné tvarové složitosti modelu, byla u analytických výpočtů provedena potřebná zjednodušení. Z tohoto důvodu vychází v porovnávání rozdílné hodnoty, avšak tyto hodnoty se v řádech neliší a lze je s numerickými hodnotami porovnávat. V tab. 3 je porovnáván nosník zatížený koly

vozíku, největší posunutí je dáno superpozicí posuvů součástí klece, proto byla reálná hodnota posunutí nosníku zjištěna, odečtením hodnoty v uložení nosníku od největšího celkového posunutí. Výsledné napětí v kleci nepřesahuje ani ve špičkových hodnotách dovolené napětí, které je pro běžnou konstrukční ocel  $160\text{MPa}$ . Můžeme tedy říci, že je klec dostatečně dimenzována.

## 8. Seznam použité literatury

- [1] LENERT, J. *Úvod do metody konečných prvků*. 1. Vyd. Ostrava: VŠB-TUO, 1999
- [2] KANÓCZ, A.; ŠPANIEL, M. *Metoda konečných prvků v mechanice poddajných těles*. Dotisk 3. Vyd. ČVUT, Praha 6, 1998
- [3] LENERT, J. *Pružnost a pevnost I*. Dotisk 1. Vyd. Ostrava: VŠB-TUO, 1999
- [4] LENERT, J. *Pružnost a pevnost II*. 1. Vyd. Ostrava: VŠB-TUO, 1998
- [5] MICHALEC, J. *Pružnost a pevnost I*. 1. Vyd. ČVUT, Praha 6, 1998
- [6] KRČÁL, O.; FRYDRÝŠEK, K.; ADÁMKOVÁ, L. *Příklady z pružnosti a pevnosti I*. (část 2.) 1. Vyd. Ostrava: VŠB-TUO, 2008